高等学校教学用书



分析力学講义

FENXI LIXUE JIANGYI

Ф. Р. 甘特馬赫著
钟奉俄　薛問西譯

人民教育出版社

高等学校教学用书



分析力学讲义

FENXI LIXUE JIANGYI

Ф. Р. 甘特馬赫著
钟奉俄　薛問西譯

人民教育出版社

本书系根据苏联国家物理数学书籍出版社（Физматгиз）出版的甘特馬赫（Ф. Р. Гантмахер）著“分析力学讲义”（Лекции по аналитической механике）一书1960年版譯出的。书中介紹了分析力学的研究方法和分析力学在李亚普諾夫稳定性理論、振动理論、剛体动力学等方面的应用。除振动理論的古典方法外，还闡述了現代頻率法的基础。也对于把分析力学方法推广到电的和机电的系統中所用的机电模拟进行了討論。

本书为讀者学习狹义相对論、量子力学和理論物理的其它部分打下足够深入的基础，并詳尽地闡述了力学的变分原理和积分不变量、正則变换和哈密頓-雅科毕方程。

本书可供綜合性大学数学力学系和物理系学生、研究生閱讀。也可以供工程研究人員和其他专家閱讀，以扩大并加深他們的力学知識。

分析力学讲义

Ф. Р. 甘特馬赫著

钟奉俄　薛問西譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

民族印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·1090　开本850×1168 1/32　印张8 6/16

字数202,000　印数0,001-5,500　定价(6)￥0.80

1963年6月第1版　1963年6月北京第1次印刷

序

"分析力学"一詞，在力学著述中并无統一涵义。有的作者把分析力学和理論力学看作是等同的[1]。另一些人认为，以广义坐标叙述力学理論是分析力学的主要标志。本书作者所持的第三种观点則是：分析力学的特征旣表現在叙述的体系方面，也表現在所探討的問題的范圍方面。

以普遍原理(微分的或积分的)为基础，用分析的方法来导出运动基本微分方程，这就是分析力学叙述体系的特征。闡述力学的普遍原理、由这些原理导出基本运动微分方程，并研究这些方程本身及其积分方法——所有这些就构成分析力学的基本內容。

在綜合性大学及师范学院的数学力学系、物理系及工程物理系的教学大綱里，分析力学是理論力学課程的一部分。而在工科大学的理論力学教学大綱中，或者根本沒有分析力学，或者仅有它的一部分。按照傳統方式分为"静力学"、"运动学"和"质点及系統的动力学"，而讲授的理論力学教程对于解决現代技术所提出的各种問題是很不够的。在現代技术各領域工作的研究工程师們，对于分析力学的一般方法是应該掌握的，因为这些方法不仅对于研究那些属于純力学現象的复杂問題，而且也对于研究那些属于电学現象和机电現象的复杂問題，給出了一个通用的分析工具。

本书并不企图将分析力学的全部內容包括无遺。本书系根据作者近六年来，在莫斯科物理技术学院对二年級第二学期学生的讲課內容写成的。这种情况也就决定了本书的取材及其讲述特点。

---

[1] 例如，Г.К. Суслов 及 Ш.Ж. Валле Пуссен 的名著"理論力学教程"曾被作者自己称为"分析力学教程"。

分析力学課程是学习量子力学、狹义相对論及广义相对論等若干理論物理章节的基础。因此，书中詳細地闡述了力学的变分原理和积分不变量、正則变換、哈密頓-雅科毕方程以及具有循环坐标的系統（二、三、四、七諸章）。在引入了 A. 龐伽雷及 Э. 卡当的思想之后，作者即以力学积分不变量作为叙述所讲材料的基础。积分不变量在这里幷非理論上的裝飾，而是工具。

非自由系統的討論与技术应用有关。第一章中仔細地研究了这类系統。从这一章讲机电模拟的一节可以看出将力学的分析方法推广用于电学系統和机电系統的可能性。五、六两章讲述了分析力学在李亚普諾夫稳定性理論及振动理論方面的应用。除綫性振动理論的古典問題而外，还讲到了近代频率法的基础。有关剛体动力学的若干問題是分散在几个例子中讲的。

本书設想讀者已經具有理論力学及高等数学的一般基础知識。本书供綜合性大学数学力学系、物理系及工程物理系学生及研究生之用，也可以供那些希望扩充幷加深自己在力学方面的知識的工程研究人員及其他专家們閱讀。

目　录

第一章 任意质点系統的运动微分方程

§1. 自由系統和非自由系統·約束及其分类

我們来研究质点系統 $P_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 相对于某慣性坐标系統(伽利略系統)的运动。系統各个质点的位置和速度受有几何学的或运动学的限制，这种限制称之为約束。具有这种約束的系統称为非自由系統，以别于沒有这种約束的自由系統。

約束可以用方程

$$f(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)=0[1] \tag{1}$$

解析地表示。它的左端包含有时間 t 以及系統所有各质点 P_ν 的矢徑 $\boldsymbol{r}_\nu$ 和速度 $\boldsymbol{v}_\nu=\dot{\boldsymbol{r}}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$。在約束方程 (1) 中不包含速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 的特别情形的約束便称之为有限約束或几何約束。它的解析表达式可以写作

$$f(t,\boldsymbol{r}_\nu)=0. \tag{2}$$

在一般情况下，約束(1)称为微分約束或运动約束。今后我們仅限于討論这样的微分約束：在它的方程中，速度是綫性地出現的，即

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{l}_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu+D=0. \tag{3}$$

---

① 字母上加一点（如 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$）表示对应的量对时間的导数。所有矢徑都是由固定在給定坐标系中的同一极点引出。往后，我們将以 $f(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)$ 表示函数 $f(t,\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_N)$ 的縮写。这种縮写方式将在全书中采用。如果 x_ν,y_ν,z_ν 是点 $P_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 在所討論的坐标系中的笛卡尔坐标，則函数 f 可以看作 $6N+1$ 个純量 $t,x_\nu,y_\nu,z_\nu,\dot{x}_\nu,\dot{y}_\nu,\dot{z}_\nu$ $(\nu=1,\cdots,N)$ 的函数。对于函数 f 以及今后在本书中遇到的所有函数，在沒有預先申明时，我們都假定这些函数及其导数是連續的。

式中 $\boldsymbol{l}_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 是矢量 $\boldsymbol{l}_\nu$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 的数积，而矢量 $\boldsymbol{l}_\nu$ 和純量 D 則是变量 t 和全体 $\boldsymbol{r}_\mu$ 的已知函数($\mu, \nu=1, \cdots, N$)。同时我們还假設全体矢量 $\boldsymbol{l}_\nu$ 不同时为零。

当有形式(2)的有限約束存在时，在每一給定时刻，系統就不能够占据空間的任意位置。有限約束在系統于时刻 t 的可能位置上加上了一定的限制。当仅有微分約束存在时，系統于任一时刻 t 可以占有空間的任意位置。但在这位置上，系統各点的速度却不能是任意的。微分約束給这些速度加上了一定的限制。

由每个形式如(2)的有限約束都可以导出一个微分約束，它的方程可由等式(2)經逐項微分而得到:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

式中 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} = \mathrm{grad}_\nu f \ (\nu=1, \cdots, N)$[①]。这样的微分約束称为可积微分約束，因为它和有限約束

$$f(t, \boldsymbol{r}_\nu) = c \tag{5}$$

是等价的。这里 c 是任意常数。

注意，在笛卡尔直角坐标中，約束方程(1)—(4)可以写成如下形式:

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) = 0, \tag{1'}$$

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0, \tag{2'}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} (A_\nu \dot{x}_\nu + B_\nu \dot{y}_\nu + C_\nu \dot{z}_\nu) + D = 0^{②}, \tag{3'}$$

---

① 若 $\boldsymbol{r}_\nu = x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j} + z_\nu \boldsymbol{k}$，其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是正交坐标軸的单位矢量，則

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y_\nu}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z_\nu}\boldsymbol{k} \quad (\nu=1, \cdots, N).$$

② $A_\nu, B_\nu, C_\nu (\nu=1, \cdots, N)$ 都是 $t, x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N$ 的数量函数。

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu+\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\dot{y}_\nu+\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\dot{z}_\nu\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=0. \qquad (4')$$

在有限約束方程 (2) 或(2′)中，如果不明显地包含时間 t，即 $\frac{\partial f}{\partial t}=0$，則这种約束称为平稳的。此时，微分約束方程 (4)的左端，对速度而言，是綫性齐次的。与此相仿，如果方程(3)的 $D=0$，而且矢量 $\boldsymbol{l}_\nu$[相应地，(3′) 的系数 A_ν, B_ν, C_ν]不明显地依賴于时間 t，則微分約束(3)或(3′) 称为平稳的。

如果沒有不可积微分約束加于质点系統的各点，則这种系統称为完整系統。因此，自由的质点系統以及具有有限約束或可积微分約束的非自由系統都是完整系統。完整系統所具有的一切約束都可以写成有限形式。

当有不可积微分約束存在时，系統称为非完整系統[①]。

仅仅具有平稳約束的系統称为平稳系統。有非平稳約束的系統称为非平稳系統。

例題 1. 质点只可以沿着曲面运动，曲面方程为

$$f(\boldsymbol{r})=0 \qquad (6)$$

或

$$f(x, y, z)=0. \qquad (6')$$

这是有限的平稳約束。

如果曲面本身在运动或变形，那么，在曲面方程中将显含时間 t：

$$f(t, \boldsymbol{r})=0 \qquad (7)$$

或

$$f(t, x, y, z)=0. \qquad (7')$$

在这种情况下，約束是有限的但非平稳的。

2. 由长度为 l 的剛性杆联結着的二质点。在这种情况下，約束方程为

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2-l^2=0 \qquad (8)$$

---

① 不可积微分約束往往又称为非完整約束，而可积微分約束有时又称为半完整約束。

或

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2=0. \tag{8'}$$

这是完整的平稳系統。

应当注意，刚体可以看作质点間距离不变的系統，即具有形式(8)的約束。从这种观点出发，自由剛体乃是非自由的、完整的平稳质点系統的特殊情况。

3. 由变长度 $l=f(t)$ 的杆联結着的二质点。約束方程可以写作:

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2-f^2(t)=0 \tag{9}$$

或

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-f^2(t)=0. \tag{9'}$$

这是完整的非平稳系統。

4. 平面上二质点由一长度为 l 的剛性杆联結，运动中杆的中点速度只可以沿着杆向(冰刀在平面上的运动)。約束方程可以写成如下的形式:

$$\left.\begin{aligned} &z_1=0,\quad z_2=0,\\ &(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-l^2=0,\\ &\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

这是非完整系統，因为(10)中最后一个方程决定一个不可积的微分約束。

形式如(1)的約束称为固执約束。在力学中还会遇到一种非固执約束，它可以用如下形式的不等式来表示:

$$f(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)\geqslant 0. \tag{11}$$

例如由长度为 l 的綫所联結的二质点。这时的約束可以用下列不等式来表示:

$$l^2-(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2\geqslant 0. \tag{12}$$

在方程(11)中，如果等号成立，我們就說約束是張紧的。

当有非固执約束存在时，系統的运动可以分段考虑:在約束是張紧的一段上，系統的运动和在固执約束情况下一样，而在約束是非張紧的一段上，則和沒有約束的情况一样。因此，在各个阶段上，非固执約束或者可代之以固执約束，或者可以完全解除。有鉴于此，今后我們将仅討論固执約束。

§2. 可能位移和虚位移・理想約束

設在质点系統上加有 d 个有限約束

$$f_\alpha(t, \boldsymbol{r}_\nu)=0 \quad (\alpha=1, \cdots, d) \tag{1}$$

和 g 个微分約束①

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\boldsymbol{v}_\nu + D_\beta = 0 \quad (\beta=1, \cdots, g). \tag{2}$$

現在将有限約束代之以其微分形式

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha=1, \cdots, d). \tag{3}$$

若矢量組 $\boldsymbol{v}_\nu$ 滿足 $d+g$ 个綫性方程(2)和(3)，則矢量組 $\boldsymbol{v}_\nu$ 称为瞬时 t 系統在其可能位置的可能速度。

因此，可能速度是約束所容許的速度。对于系統在时刻 t 的每一可能位置，都存在无数組可能速度，而系統在时刻 t 作实际运动时，这无数組速度中仅有一組被实現。

我們将无限小位移

$$d\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu dt \quad (\nu=1, \cdots, N) \tag{4}$$

叫做可能的无限小位移或簡称为可能位移，其中 $\boldsymbol{v}_\nu$ $(\nu=1, \cdots, N)$ 是可能速度。将方程(2)和(3)逐項乘以 dt 就得到决定可能位移的方程:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} d\boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad (\alpha=1, \cdots, d), \\ &\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} d\boldsymbol{r}_\nu + D_\beta dt = 0 \quad (\beta=1, \cdots, g). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

取系統在同一时刻、同一位置的两組可能位移

---

① 在微分約束方程中，我們将 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 写成 $\boldsymbol{v}_\nu$。

$$dr_\nu = v_\nu dt,\quad d'r_\nu = v'_\nu dt\ \ (\nu=1,\cdots,N).$$

dr_ν 和 $d'r_\nu$ 同样都满足方程(5)，但差

$$\delta r_\nu = d'r_\nu - dr_\nu\ \ (\nu=1,\cdots,N) \tag{6}$$

却满足齐次关系式:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial r_\nu}\delta r_\nu=0\ \ (\alpha=1,\cdots,d),\\&\sum_{\nu=1}^{N} l_{\beta\nu}\delta r_\nu=0\ \ (\beta=1,\cdots,g).\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

差 $\delta r_\nu = d'r_\nu - dr_\nu$ 称为虛位移。满足方程(7)的任意一組矢量 δr_ν 都是一組虛位移。关于虛位移的方程(7)和确定可能位移的方程(5)之間的差别仅在于方程(7)沒有$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt$及 $D_\beta dt$ 两項。因此可以說，当約束被“凝固”时，虛位移与可能位移是一样的。

事实上，当約束被“凝固”时，出現在有限約束中的时間 t 就被固定了，也就是說，約束将保持它在时刻 t 的形状不变。因此，在求函数 f_α 的微分时就不出現$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt$ 这一項，因之，(5)式的头 d 个方程就和(7)式中的头 d 个一样。对于微分約束而言，“凝固”就意味着使之具有平稳的特征，即丢掉約束方程左端中的 D_β 并使显含在系数 $l_{\beta\nu}$ 中的 t 固定不变。这样一来，方程(5)中的后 g 个方程就和(7)中对应的方程完全相同。

我們也可以这样說：虛位移乃是系統各质点从系統在时刻 t 的某一可能位置到系統在同一时刻 t 可能占有的另一无限临近位置的位移。

在平稳約束情况下，虛位移与可能位移一致。

例題 1. 点沿固定曲面运动(图 1)。

在这种情况下，从点 P 所引出的、在該点与曲面相切的任一矢量 v 都是可能速度。对应的可能位移 $dr=vdt$ 則位于曲面在点 P 的切平面內。二切

綫矢量之差 $\delta \boldsymbol{r}=d'\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{r}$ 也是与曲面在同一点相切的矢量。因此，由点 P 所作的位于切平面內的任何矢量既可以看作是某一个 $d\boldsymbol{r}$ 也可以看作是某一个 $\delta \boldsymbol{r}$。在这个例子中，約束是平稳的，因之，虚位移和可能位移一致。

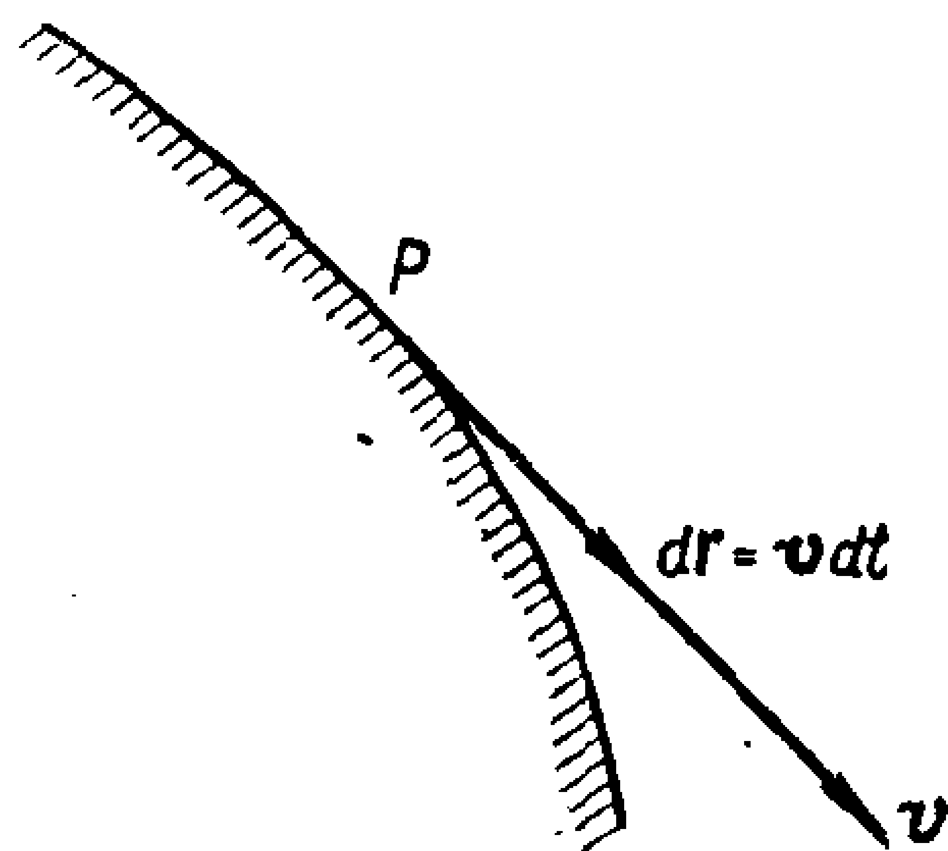


图 1.

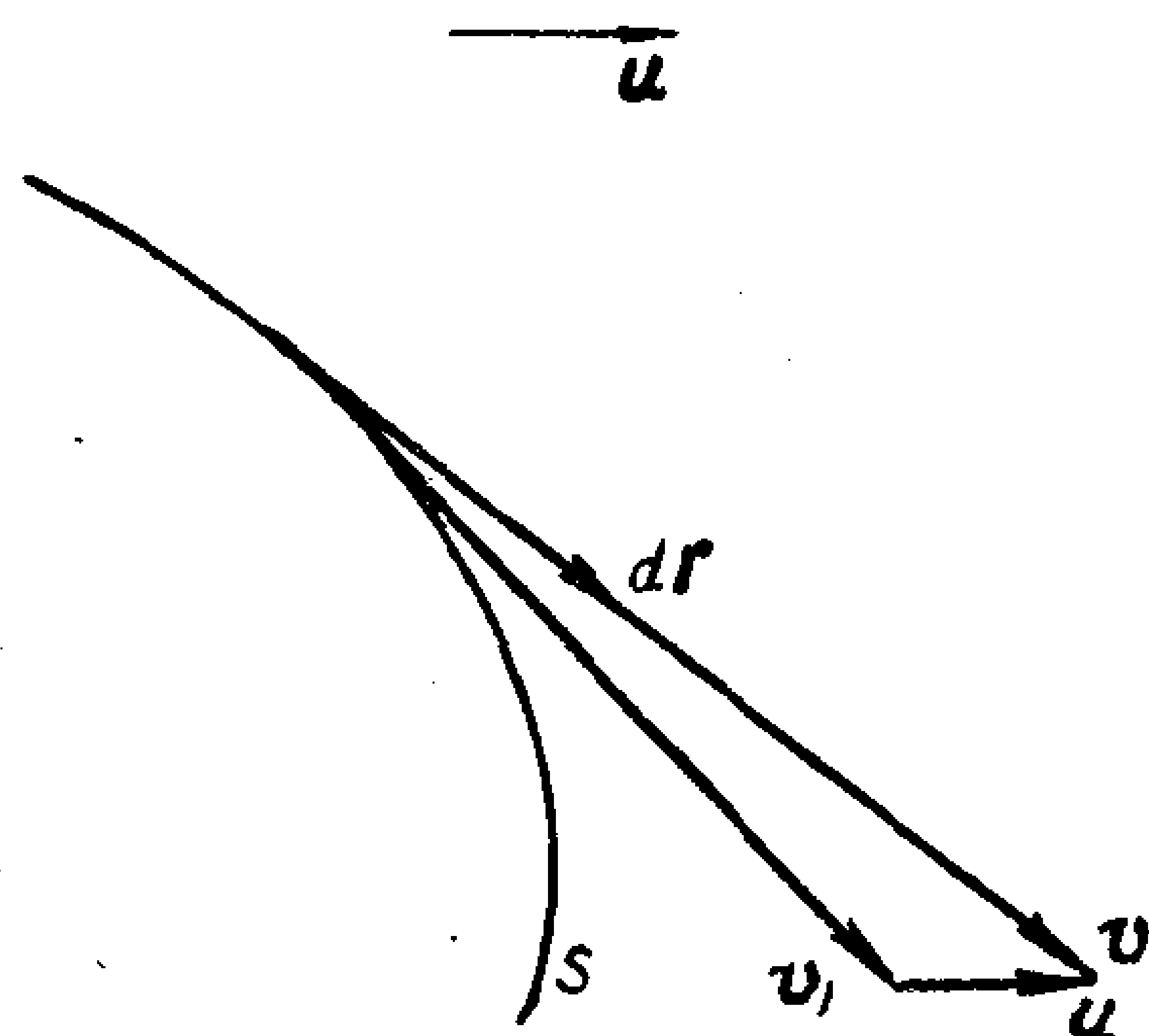


图 2.

2. 作为約束的曲面 S 以速度 $\boldsymbol{u}$ 相对于原来坐标系（像剛体一样地）运动（图 2）。

此时，可能速度 $\boldsymbol{v}$ 可由与曲面相切的任一矢量 $\boldsymbol{v}_1$ 同曲面自身的速度 $\boldsymbol{u}$ 之和得出：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}.$$

因此，

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\,dt=\boldsymbol{v}_1\,dt+\boldsymbol{u}\,dt.$$

与此相仿，对于另一个可能位移则有

$$d'\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_1'\,dt+\boldsymbol{u}\,dt.$$

因而，虚位移

$$\delta \boldsymbol{r}=d'\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{v}_1'-\boldsymbol{v}_1)dt$$

和 $d\boldsymbol{r}$ 不同，它是位于过 P 点的切平面上的矢量（图 3）。矢量 $\delta \boldsymbol{r}$ 是当曲面 S 不动时的可能位移。

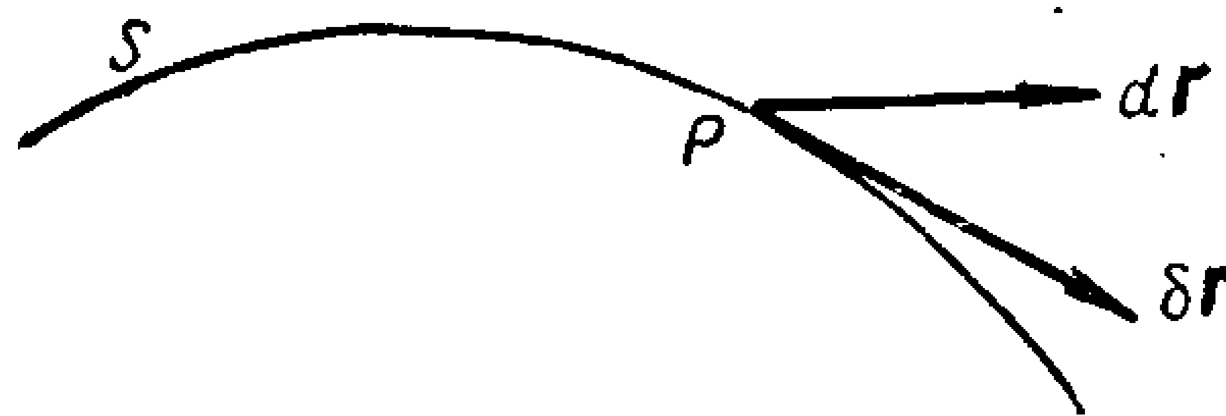


图 3.

在笛卡尔坐标中，$\delta \boldsymbol{r}_\nu$ 可用它沿坐标軸的三个投影 δx_ν，δy_ν，δz_ν $(\nu=1, \cdots, N)$ 来表示，因而，确定虚位移的方程(7)可以写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right)=0\ \ (\alpha=1,\cdots,d),\\ \sum_{\nu=1}^{N}(A_{\beta\nu}\delta x_\nu+B_{\beta\nu}\delta y_\nu+C_{\beta\nu}\delta z_\nu)=0\ \ (\beta=1,\cdots,g).\end{aligned}\right\}\tag{7'}$$

如果这 $d+g$ 个方程是独立的，則 $3N$ 个坐标虚增量 δx_ν, δy_ν, δz_ν 中将有 $n=3N-d-g$ 个是独立的。数 n 称为质点系統的自由度。

設在系統各质点 P_ν 上分别作用有力 $\boldsymbol{F}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$[①]。如果沒有約束，則按牛頓第二定律，质量 m_ν、加速度 $\boldsymbol{w}_\nu$ 和力 $\boldsymbol{F}_\nu$ 之間有 $m_\nu\boldsymbol{w}_\nu=\boldsymbol{F}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 的关系。在有約束存在的情况下，加速度 $\boldsymbol{w}_\nu=\dfrac{1}{m_\nu}\boldsymbol{F}_\nu$（在給定的时刻 t 和系統各质点的給定位置 $\boldsymbol{r}_\nu$ 和速度 $\boldsymbol{v}_\nu$ 之下）可能和約束不一致。事实上，将等式(3)和(2)对时間逐項微分便得到約束加在系統各质点加速度 $\boldsymbol{w}_\nu$ 上的限制的解析表达式[②]:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\boldsymbol{w}_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\right)\boldsymbol{v}_\nu+\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0\quad(\alpha=1,\cdots,d),\\ \sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{l}_{\beta\nu}\boldsymbol{w}_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\frac{d\boldsymbol{l}_{\beta\nu}}{dt}\boldsymbol{v}_\nu+\frac{dD_\beta}{dt}=0\ \ (\beta=1,\cdots,g).\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

加速度 $\boldsymbol{w}_\nu=\dfrac{1}{m_\nu}\boldsymbol{F}_\nu$ 可能不滿足这些关系。因此，实际存在的約束将在系統的质点 P_ν 上作用以附加的力 $\boldsymbol{R}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$；这些由約束产生的作用力称之为約束反力[③]。所产生的反力应当使由

---

① $\boldsymbol{F}_\nu$ 应理解为直接作用在质点 P_ν 上的一切力的合力$(\nu=1,\cdots,N)$。

② (8)式左端綫性地依賴于加速度 $\boldsymbol{w}_\nu$。不难看出，这些左端部分在微分之后仍然依賴于 t, $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$。

③ 当有若干个約束存在 $(d+g>1)$ 时，$\boldsymbol{R}_\nu$ 就是作用在点 P_ν 上的全体約束反力的合力$(\nu=1,\cdots,N)$。

方程

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu=\boldsymbol{F}_\nu+\boldsymbol{R}_\nu \quad (\nu=1,\cdots,N) \tag{9}$$

所确定的加速度为約束所容許。

为了和反力 $\boldsymbol{R}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 相区别，我們将预先給定的力 $\boldsymbol{F}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 称为主动力。主动力通常是时間和系統各质点位置和速度的已知函数[①]。

$$\boldsymbol{F}_\nu=\boldsymbol{F}_\nu(t,\boldsymbol{r}_\mu,\boldsymbol{v}_\mu) \quad (\nu=1,\cdots,N) \tag{10}$$

非自由系統动力学的基本問題如下：

設主动力 $\boldsymbol{F}_\nu=\boldsymbol{F}_\nu(t,\boldsymbol{r}_\mu,\boldsymbol{v}_\mu)$ 是已知的，系統各质点的一組为約束所容許的初始位置 $\boldsymbol{r}_\nu^0$ 和初始速度 $\boldsymbol{v}_\nu^0$ 也是已知的 $(\nu=1,\cdots,N)$。求系統的运动和約束反力 $\boldsymbol{R}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$[②]。

如果除方程(1)、(2)而外，关于約束的特征一无所知，因而，关于这些約束所产生的反力 $\boldsymbol{R}_\nu$ 我們也就一无所知，則前述問題将无法确定。因为在这种情况下，需要确定的未知数 $x_\nu, y_\nu, z_\nu, R_{\nu x}, R_{\nu y}, R_{\nu z}$ 多于現有的方程 $m_\nu\ddot{x}_\nu=F_{\nu x}+R_{\nu x}, m_\nu\ddot{y}_\nu=F_{\nu y}+R_{\nu y}, m_\nu\ddot{z}_\nu=$ $=F_{\nu z}+R_{\nu z}$ 和約束方程(1)、(2)$(6N>3N+d+g)$。

为使动力学基本問題成为能够确定的，对未知量就还需要有 $6N-(3N+d+g)=3N-d-g=n$ 个补充的独立关系式。若仅限于討論理想約束这一重要类型，这些关系式是可以得到的。

若約束反力在任何虚位移上所作功的总和等于零，即

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{R}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu=0, \tag{11}$$

則这种約束就称为理想約束。式(11)还可以写成如下的展开形式：

$$\sum_{\nu=1}^{N}(R_{\nu x}\delta x_\nu+R_{\nu y}\delta y_\nu+R_{\nu z}\delta z_\nu)=0. \tag{11'}$$

---

① 在一般情况下，(10)式右端除 t 而外还依賴于所有的 $\boldsymbol{r}_\mu$ 和 $\boldsymbol{v}_\mu(\mu=1,\cdots,N)$。

② 对于自由系統，无需确定反力而仅需确定系統的运动。

在 $3N$ 个量 $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ 中有 n 个是独立的($n=3N-d-g$ 是系統的自由度数)。因此，在(11′)式中可以将 $3N-n$ 个不独立的增量 δx_ν, δy_ν, δz_ν 通过 n 个独立的增量表出。令这些独立增量的系数等于零，就得到所短少的 n 个关系式。有了这些关系式非自由系統的动力学基本問題就成为确定的了。

在討論了下面几个理想約束的例子之后，就可以見出引入理想約束的必然性及其在实踐上的重要性是很显然的。

例題 1. 质点沿固定光滑曲面运动(图 4)。

在这种情况下，任何可能位移 $d\boldsymbol{r}$ 和任何虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 都位于曲面过 P 点的切平面上，而光滑曲面的反力則沿曲面过 P 点的法綫方向；因此，恒有

$$\boldsymbol{R}d\boldsymbol{r}=0 \text{ 或 } \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{r}=0.$$

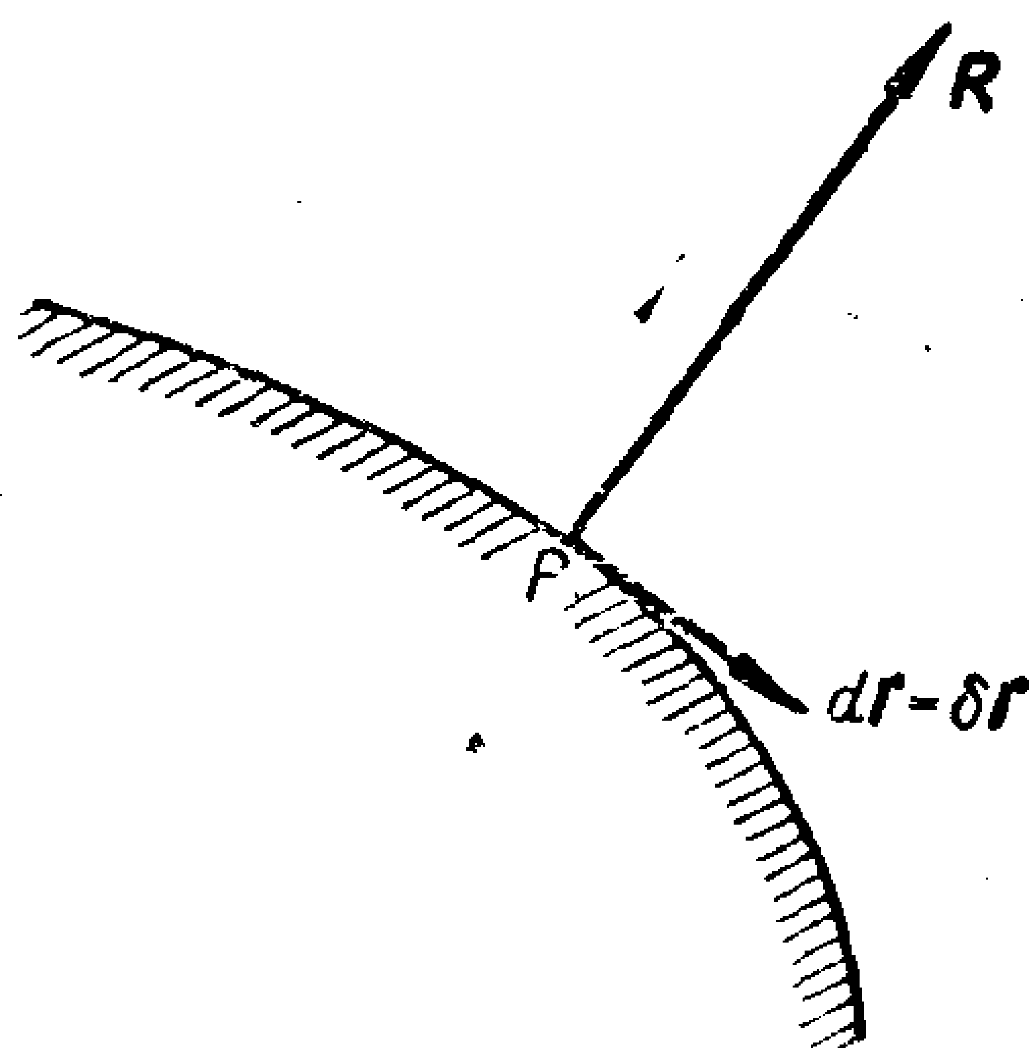


图 4.

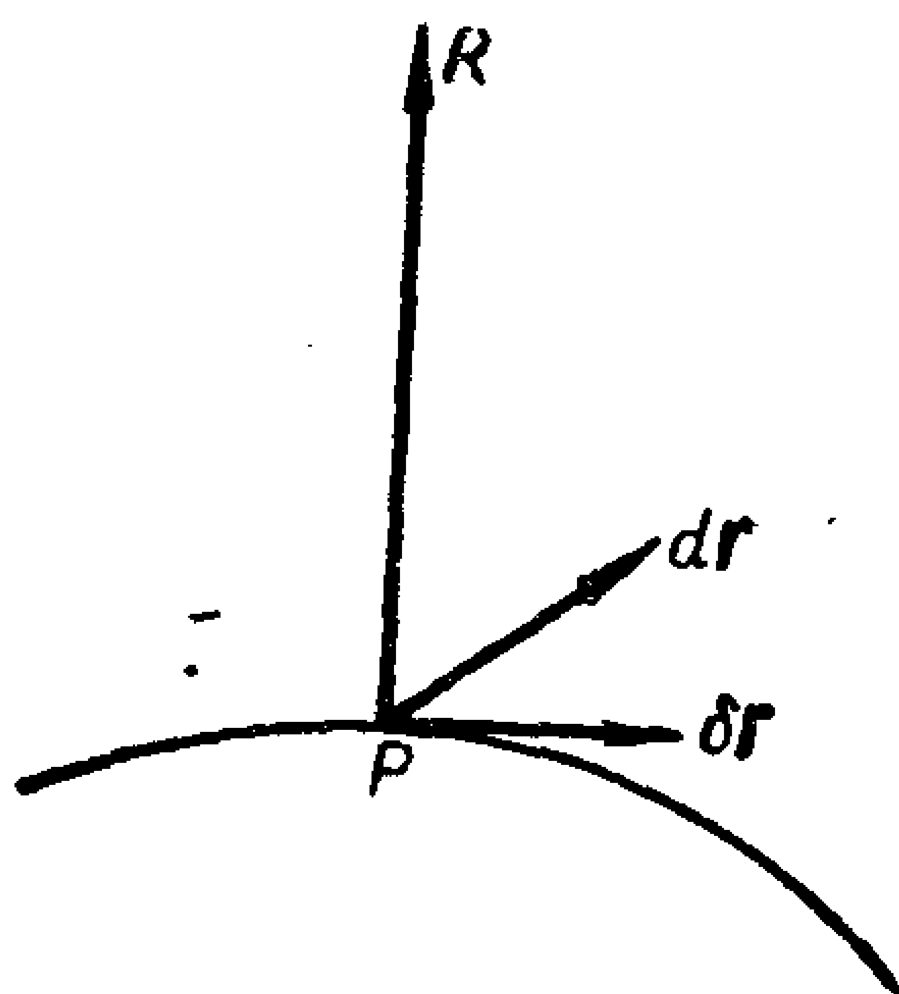


图 5.

2. 质点沿运动着的或形状变化着的光滑曲面运动(图 5)。

在这种情况下，质点的可能速度不再位于切平面上，因而无限小位移 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}dt$ 也不在切平面上(見第 7 頁例 2)。但虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 乃是当曲面"被阻止不动"或"被凝固不变"时的可能位移，因而仍在切平面內。又由于光滑曲面在运动和变形的情况下反力还是沿曲面的法綫方向，所以 $\boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{r}=0$(但 $\boldsymbol{R}d\boldsymbol{r}\neq0$)。

因此，光滑曲面，无論它是固定的，还是运动的，还是变形的，都是理想約束。

例 2 很清楚地說明了在定义非平稳的理想約束时，为什么必

須用反力在任意虛位移上之功为零，而不是在可能位移上之功为零。

在以下的几个例子中，我們遇到的都只是平稳約束①。

3. 二质点由长度不变的杆子相互联結，杆子的质量小得可以略去不計(图 6)。

以 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 表示作用在质点 P_1 和 P_2 上的約束反力。于是，根据牛顿第三定律，作用在杆上的力 $\boldsymbol{N}_1=-\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{N}_2=-\boldsymbol{R}_2$。以 m 表示杆子的质量，$\boldsymbol{w}$ 表示杆子慣性中心的加速度，I 和 ε 分别表示杆子的中心轉动慣量和角加速度，則

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2,\quad I\varepsilon=L,$$

式中 L 是力 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 对慣性中心的力矩之和。但是，根据条件，$m=0$，$I=0$。所以 $\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2=0$，$L=0$②。由这些等式可以得知：力 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 亦即 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 沿杆向，方向相反。

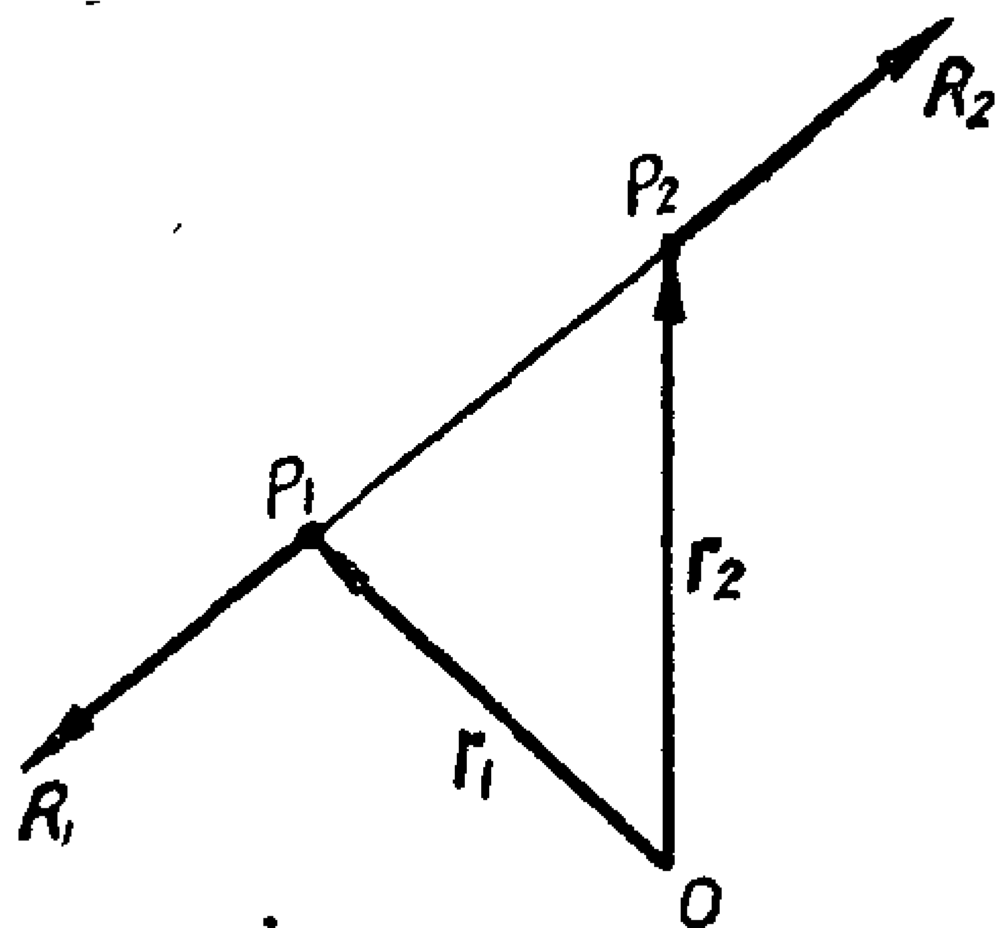


图 6.

其次，由于

$$\boldsymbol{R}_1\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{R}_2\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{R}_1d\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{R}_2d\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{R}_2(d\boldsymbol{r}_2-d\boldsymbol{r}_1)=\boldsymbol{R}_2d(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1),$$

因而，当令 $\boldsymbol{R}_2=c(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$ 时，便有

$$\boldsymbol{R}_1\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{R}_2\delta\boldsymbol{r}_2=c(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)d(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\frac{c}{2}d(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^2=0,$$

因为 $(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^2=\mathrm{const}$。

絕对剛体可以看作任意两点間都作用有上述形式約束的质点系統。因此，可以认为剛体是具有理想約束的质点系統。如果剛体上除了使其各点間距离保持不变的約束而外，别无其它約束，則此剛体称为自由剛体。

4. 两个剛体用鉸鏈联結于点 A(图 7)。略去鉸鏈的质量和大小不計，即可看出(如前例所述) $\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2=0$，因而

$$\boldsymbol{R}_1\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}_2\delta\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2)\delta\boldsymbol{r}=0.$$

---

① 从理想約束的定义可知，若将非平稳約束在各个不同时刻的形态固定下来看作平稳約束时，这些平稳約束全是理想約束，則此非平稳約束是理想約束。

② 如果杆不是作平面运动，則数量等式 $I\varepsilon=L$ 应代之以矢量等式 $\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{I}}\omega)=\boldsymbol{L}$，式中 $\hat{\boldsymbol{I}}$ 是慣量張量，ω 是角速度。由等式 $\hat{\boldsymbol{I}}=0$ 仍然得到 $\boldsymbol{L}=0$。

5. 二剛体在运动中以理想光滑表面(潤滑很好的表面!)相接触(图 8)。在这种情况下仍有 $\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2=0$, 而且 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 都沿曲面的公共法綫。另外,由于两个物体接触处的相对速度 $\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$ 位于公切面內, 因而可能位移之差 $d\boldsymbol{r}_2-d\boldsymbol{r}_1=(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)dt$ 也位于公切面內, 故

$$\boldsymbol{R}_1\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{R}_2\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{R}_1d\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{R}_2d\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{R}_2(d\boldsymbol{r}_2-d\boldsymbol{r}_1)=0.$$

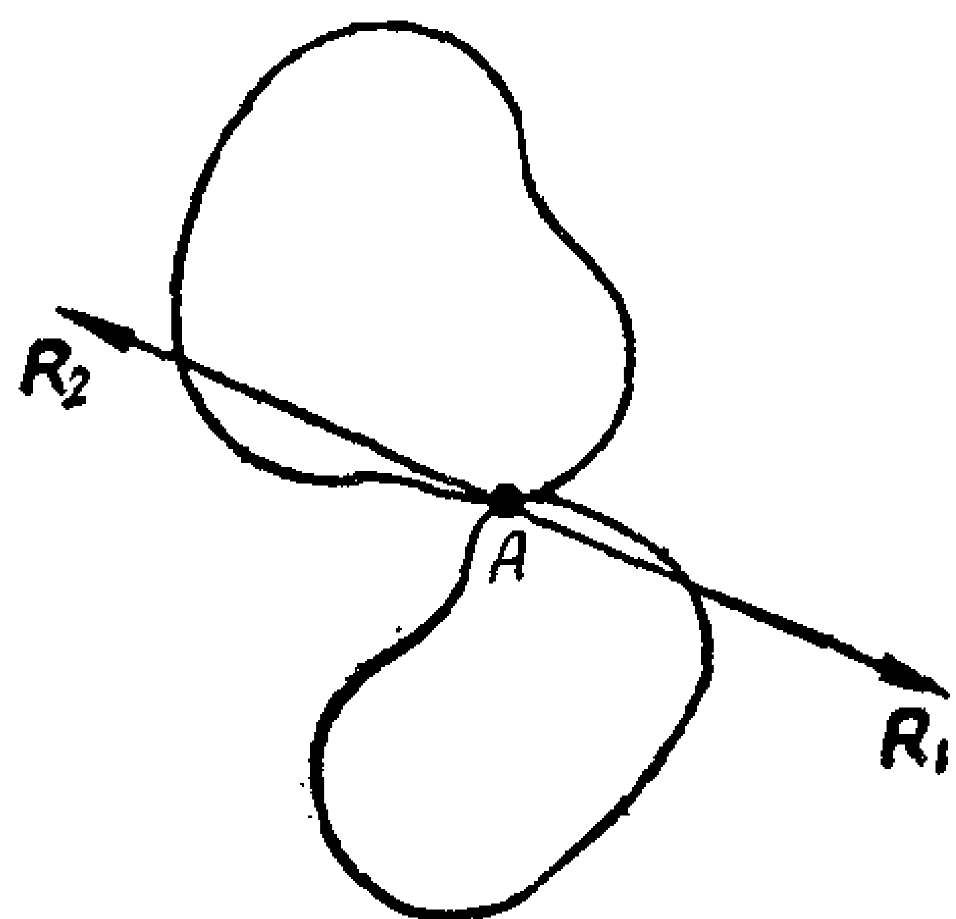


图 7.

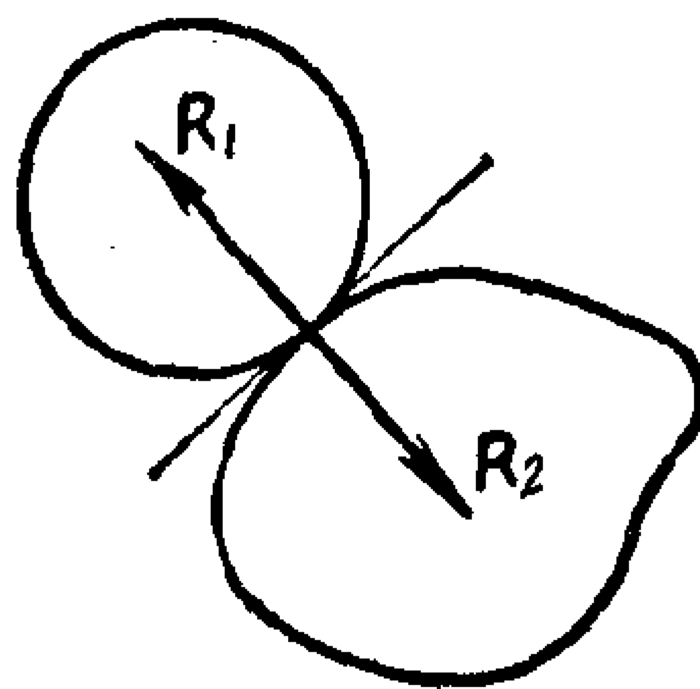


图 8.

6. 两个剛体在运动中以完全粗糙表面相接触("齿的嚙合")。在这种情况下,相对滑动速度等于 $\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1=0$, 因而, $d\boldsymbol{r}_2-d\boldsymbol{r}_1=(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)dt=0$, 所以

$$\boldsymbol{R}_1\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{R}_2\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{R}_2(d\boldsymbol{r}_2-d\boldsymbol{r}_1)=0.$$

复杂机构可以看作剛体系統,其中剛体两两之間或剛性联結,或以鉸鏈联結, 或以其表面相互接触。如果认为所有剛性联結是絕对剛性的,鉸鏈是理想的,而所有接触面或者是理想光滑的或者是完全粗糙的,則任一复杂机构均可看作具有理想約束的质点系統。

不过,应該注意的是: 在許多情况下,这样的理想化是不允許的。例如, 略去摩擦力有时就会使現象的物理性状遭到严重的歪曲。在这种情况下, 就必須放弃理想約束的条件代之以由約束特征和摩擦定律导出的条件。

这种情况也可以按另一种方式处理: 只考虑非光滑面反作用力的法向分量, 同时将摩擦力看作未知主动力, 則約束仍然可以认为是理想的。由于新未知量一摩擦力的出現而短少的方程可由

摩擦的实驗定律来补充。

对理想約束的概念作了这样的一些解釋之后，这个概念在实际上就能够普遍适用了。

往后我們永远假定加在系統上的一切約束都是理想的。

§3. 动力学普遍方程·第一类拉格朗日方程

对于非自由质点系統，下列方程成立:

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \quad (\nu=1, \cdots, N), \tag{1}$$

式中 m_ν 是第 ν 个质点的质量，$\boldsymbol{w}_\nu$ 是它的加速度，而 $\boldsymbol{F}_\nu$ 和 $\boldsymbol{R}_\nu$ 分別是作用在这个质点上的主动力的合力和反力的合力 ($\nu=1,\cdots,N$)。由于約束是理想的，所以，在系統的任一位置，对于任何虛位移都有

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{2}$$

由方程(1)解出 $\boldsymbol{R}_\nu$，代入上式，并于所得等式的两侧同乘以 -1，即得:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \boldsymbol{w}_\nu) \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{3}$$

等式(3)称为动力学普遍方程。这个等式表明: 在系統运动的任一时刻，主动力和慣性力在任何虛位移上所作之功之和为零。

因此，与已知主动力 $\boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu=1, \cdots, N$) 相适应的、为約束所容許的任何运动恒滿足动力学普遍方程。

反之，假設給定了系統的某一为約束所容許的运动，它滿足动力学普遍方程(3)。于是，当令 $\boldsymbol{R}_\nu = m_\nu \boldsymbol{w}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu=1, \cdots, N$) 时，等式(1)和(2)成立。因此在任何时刻都可以选取这样的約束反力 $\boldsymbol{R}_\nu$，按等式(2)，它是为給定約束所容許的，而且在这样的反力之下，由牛頓第二定律所得到的方程(1)成立。我們认为实际出現的

就是这些反力 $\boldsymbol{R}_\nu$（“容許反力可实現性假設”），因之，給定的运动和給定的主动力 $\boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu)$ $(\nu=1, \cdots, N)$ 相适应。因此，动力学普遍方程表示了为約束所容許的运动和給定的主动力系 $\boldsymbol{F}_\nu (\nu=1, \cdots, N)$ 相适应的必要充分条件①。

我們用所謂的拉格朗日不定乘子来求反力 $\boldsymbol{R}_\nu$ 的表达式。为此先写出确定系統各点虛位移的关系式(見 § 2)：

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\delta \boldsymbol{r}_\nu=0 \quad (\alpha=1, \cdots, d), \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{l}_{\beta\nu}\delta \boldsymbol{r}_\nu=0 \quad (\beta=1, \cdots, g). \tag{5}$$

将等式(4)、(5)分别乘以任意数量因子 $-\lambda_\alpha$ 和 $-\mu_\beta$ 并与等式(2)相加，則得

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\boldsymbol{R}_\nu-\sum_{\alpha=1}^{d}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\right)\delta \boldsymbol{r}_\nu=0. \tag{6}$$

上式可以写成如下的展开形式：

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(R_{\nu x}-\sum_{\alpha=1}^{d}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta A_{\beta\nu}\right)\delta x_\nu+\{y\}_\nu\delta y_\nu+\{z\}_\nu\delta z_\nu=0. \tag{6'}$$

其中 $\{y\}_\nu$ 和 $\{z\}_\nu$ 代表将 δx_ν 的系数中的字母 x、A 分别代之以 y、B 和 z、C 而得到的表达式。

由 § 2 关系式(7′)可将 $3N$ 个虛增量 $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ 中的 $d+g$ 个通过其余的 $n=3N-d-g$ 个表出。此时由 § 2 方程(7′)中“不独立增量”的系数所构成的行列式 J 不等于零。

現在来选擇 $d+g$ 个乘数 λ_α 和 μ_β，使等式(6′)中的 $d+g$ 个“不独立增量”的系数为零。这是可以作到的，而且这些乘数可以唯一地被确定，因为由待定量 λ_α 和 μ_β 的系数所組成的行列式等

① 不要忘記，动力学普遍方程(3)实际上并非一个方程而是一組方程，因为对于任何时刻 t 都可以用任意的虛位移来代替方程(3)中的 $\delta r_\nu(\nu=1, \cdots, N)$。

于 $J\neq 0$。确定了这些乘数之后，(6′)式中剩下的就只是包含独立增量 $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ 的各項了。而这些独立增量的系数也应当等于零。

換句話說，适当地选擇不定乘子 λ_α 和 μ_β 就可以使等式(6′)中的全体数量系数，亦即等式(6)中的全体矢量系数等于零。于是，得到

$$\boldsymbol{R}_\nu=\sum_{\alpha=1}^{d}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\ \ (\nu=1,\cdots,N). \tag{7}$$

我們得到了以拉格朗日不定乘子 λ_α、$\mu_\beta(\alpha=1,\cdots,d;\beta=1,\cdots,g)$ 表示的关于理想約束的反力的一般公式。

将 $\boldsymbol{R}_\nu$ 的表达式(7)代入方程(1)，就得到所謂第一类拉格朗日方程[①]：

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu=\boldsymbol{F}_\nu+\sum_{\alpha=1}^{d}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta \boldsymbol{l}_{\beta\nu}\ \ (\nu=1,\cdots,N). \tag{8}$$

在这些方程中，还应当补充以約束方程：

$$f_\alpha(t,\boldsymbol{r}_\nu)=0^*,\quad \sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{l}_{\beta\nu}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu+D_\beta=0\ \ (\alpha=1,\cdots,d;\beta=1,\cdots,g). \tag{9}$$

每个矢量方程都可以用三个数量方程代替。方程(8)和(9)可以看作是关于 $3N+d+g$ 个未知数 $x_\nu, y_\nu, z_\nu, \lambda_\alpha, \mu_\beta$ 的 $3N+d++g$ 个数量方程。对这些方程进行积分就得到有限形式的运动方程，同时由方程(7)可以求出約束反力。但是，由于方程个数多，对于这些方程进行积分通常是很困难的，因此，第一类拉格朗日方程实际上很少被采用。

---

① 这些方程曾由法国数学家和力学家拉格朗日在其名著"分析力学"中提出。这部著作发表于1788年(俄譯本第一卷于1938年出版，第二卷于1950年出版)。它首次闡述了分析力学的基本理論。

* 此处原作为 $f_\alpha(\boldsymbol{r}_\nu)=0$，可能是笔誤，为使前后一致，譯者将其改为 $f_\alpha(t,\boldsymbol{r}_\nu)==0$。

在§6和§9中我們将得到关于完整系統的第二类拉格朗日方程以及关于非完整系統的阿沛尔方程；在这些方程中，未知数的个数(因而也就是方程的个数)等于$3N-d$，比方程組(8)和(9)少$2d+g$个。

例．两个质量均为$m=1$的重质点M_1和M_2，由一不变长度l的杆相联結，杆的质量可以略去不計。設此质点系統仅能在鉛垂平面里运动，而且杆的中点速度必須沿杆子方向。求质点M_1和M_2的运动。

令质点M_1和M_2的坐标分別为x_1, y_1和x_2, y_2，則約束方程可以写作

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2]=0,\\&(x_2-x_1)(\dot{y}_2+\dot{y}_1)-(\dot{x}_2+\dot{x}_1)(y_2-y_1)=0.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

带不定乘子λ和μ的拉格朗日方程具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_1&=-\lambda(x_2-x_1)-\mu(y_2-y_1),\\\ddot{y}_1&=-g-\lambda(y_2-y_1)+\mu(x_2-x_1)\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_2&=\lambda(x_2-x_1)-\mu(y_2-y_1),\\\ddot{y}_2&=-g+\lambda(y_2-y_1)+\mu(x_2-x_1).\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

由方程(11)并考虑到(10)式的头一个方程即可求得λ和μ：

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=-\frac{g}{l^2}(y_2-y_1)-\frac{1}{l^2}[(x_2-x_1)\ddot{x}_1+(y_2-y_1)\ddot{y}_1],\\\mu&=\frac{g}{l^2}(x_2-x_1)-\frac{1}{l^2}[(y_2-y_1)\ddot{x}_1-(x_2-x_1)\ddot{y}_1].\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

注意，如果在方程(11)中以$-\lambda$代λ，以$\ddot{x}_2, \ddot{y}_2$代$\ddot{x}_1, \ddot{y}_1$我們就可以得到方程(12)，因此，由方程(12)确定λ和μ时就得到

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{g}{l^2}(y_2-y_1)+\frac{1}{l^2}[(x_2-x_1)\ddot{x}_2+(y_2-y_1)\ddot{y}_2],\\\mu&=\frac{g}{l^2}(x_2-x_1)-\frac{1}{l^2}[(y_2-y_1)\ddot{x}_2-(x_2-x_1)\ddot{y}_2].\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

令公式(13)和(14)中关于λ和μ的相应表达式彼此相等，則稍經变换之后便得到

$$\left.\begin{aligned}(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)(y_2-y_1)-(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)(x_2-x_1)=0,\\(\ddot{x}_2+\ddot{x}_1)(x_2-x_1)+(\ddot{y}_2+\ddot{y}_1)(y_2-y_1)+2g(y_2-y_1)=0.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

为簡便計，令

$$u=x_2-x_1,\quad v=y_2-y_1,\quad P=\dot{x}_1+\dot{x}_2,\quad Q=\dot{y}_1+\dot{y}_2, \tag{16}$$

则方程(10)和方程(15)可以写作

$$\left.\begin{array}{l} u^2+v^2=l^2, \\ \ddot{u}v-u\ddot{v}=0, \end{array}\right\} \tag{17}$$

$$Pv-Qu=0, \tag{18}$$

$$\dot{P}u+\dot{Q}v+2gv=0. \tag{19}$$

等式(17)表明在(u, v)平面上坐标为u, v的点沿以原点为中心以l为半徑的圆周运动，且其加速度永远指向圆心。但这样的运动必然是等速的，因此

$$u=l\cos\varphi,\quad v=l\sin\varphi,\quad \dot{\varphi}=\alpha=\text{const},\quad \varphi=\alpha t+\beta. \tag{20}$$

根据等式(18)，可設

$$P=\frac{f}{l}u,\quad Q=\frac{f}{l}v. \tag{21}$$

将上式代入等式(19)并考虑到等式(17)和(20)便得到

$$\dot{f}+\frac{2g}{l}v=0,\ \text{即}\ \dot{f}=-2g\sin\varphi.$$

于是，

$$\frac{df}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{f}=-\frac{2g}{\alpha}\sin\varphi,\quad f=\frac{2g}{\alpha}\cos\varphi+2\gamma.$$

因此，根据等式(20)和(21)便有

$$P=2\left(\gamma+\frac{g}{\alpha}\cos\varphi\right)\cos\varphi,\quad Q=2\left(\gamma+\frac{g}{\alpha}\cos\varphi\right)\sin\varphi. \tag{22}$$

积分之，即得：

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=\int P\,dt=\frac{1}{\alpha}\int P\,d\varphi=\frac{2\gamma}{\alpha}\sin\varphi+\frac{g}{\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{g}{\alpha^2}\varphi+2\delta, \\ y_1+y_2=-\frac{2\gamma}{\alpha}\cos\varphi-\frac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi+2\varepsilon. \end{array}\right\} \tag{23}$$

由等式(16)，(20)和(23)最后就得到

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi+\frac{g}{2\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{g}{2\alpha^2}\varphi-\frac{l}{2}\cos\varphi+\delta, \\ y_1=-\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi-\frac{g}{2\alpha^2}\cos^2\varphi-\frac{l}{2}\sin\varphi+\varepsilon, \\ x_2=\frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi+\frac{g}{2\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{g}{2\alpha^2}\varphi+\frac{l}{2}\cos\varphi+\delta, \\ y_2=-\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi-\frac{g}{2\alpha^2}\cos^2\varphi+\frac{l}{2}\sin\varphi+\varepsilon, \\ \varphi=\alpha t+\beta \end{array}\right\} \tag{24}$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ 都是任意常数)。

§4. 虛位移原理·达朗伯原理

如果系統于初始时刻处于某位置且各点速度为零，而在其后的全部时間里恒处于此位置，则这个位置称为系統的平衡位置。

系統的位置 $\boldsymbol{r}_\nu^0\ (\nu=1, \cdots, N)$ 在而且仅在"运动" $\boldsymbol{r}_\nu(t)\equiv\boldsymbol{r}_\nu^0$ $(\nu=1,\cdots,N)$ 满足动力学普遍方程的情况下才是平衡位置，即在系統的这个位置上

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu=0. \tag{1}$$

等式(1)本身表出了虛位移原理。

系統的某一（符合約束的）位置是平衡位置的必要充分条件是：在此位置主动力在系統的任何虛位移上所作之功之和为零。

虛位移原理通常多用于平稳約束。如果約束是平稳的，則"符合約束"一詞是指系統的位置滿足有限約束。至于微分約束，由于它对于速度是綫性齐次的，又因为我們假定了 $\boldsymbol{v}_\nu=0(\nu=1, \cdots, N)$，所以对于平稳情况，它是自动满足的。

如果約束是非平稳的，則"符合約束"的意思是指对于任意的时間 t，当在約束方程中令 $\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{r}_\nu^0$ 和 $\boldsymbol{v}_\nu=0(\nu=1, \cdots, N)$ 时約束方程被滿足。应該注意，在这种情况下，t 不同时，虛位移 $\delta\boldsymbol{r}_\nu(\nu=$ $=1, \cdots, N)$也可以不同。

在一般情况下，力 $\boldsymbol{F}_\nu$ 有賴于 t, $\boldsymbol{r}_\mu$, $\boldsymbol{v}_\mu(\mu=1, \cdots, N)$: $\boldsymbol{F}_\nu=$ $=\boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu)\ (\nu=1, \cdots, N)$。此时，等式(1)指的是：当在 $\boldsymbol{F}_\nu$ 的表达式中令全体 $\boldsymbol{r}_\mu=\boldsymbol{r}_\mu^0$、全体 $\boldsymbol{v}_\mu=0$ 时，它对于任意的时刻 t 都成立。

在最簡单特殊情况下的虛位移原理(在用于平稳系統时往往又称为可能

位移原理)在伽利略时代即以“力学金律”之名为人所知①。

假設在无重量杠杆或滑輪(无摩擦)的两端有两个物体在力 F_1 和 F_2 的作用下处于平衡。以 F'_1 和 F'_2 記这两个力沿其可能軌迹的切綫分量，以 δl_1 和 δl_2 記相应的可能元位移，則由等式(1)，考慮到符号，便有

$$F'_1\delta l_1=F'_2\delta l_2,$$

即

$$\frac{\delta l_1}{\delta l_2}=\frac{F'_2}{F'_1}$$

(得之于力失之于位移，反之亦然，此即“力学金律”)。

虚位移原理是分析靜力学最普遍的原理。根据这一原理可以得到任何具体机械系統的平衡条件。

例题 1. 根据等式(1)来推导通常在力学教科书中用几何靜力学方法得到的自由剛体平衡条件。以 $\boldsymbol{v}_o$ 表示剛体上任一点的速度，$\boldsymbol{\omega}$ 表示角速度，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{L}_o$ 分别表示作用在剛体上的外力系对极点 O 的主矢量和主矩，并令剛体上的作用力在剛体的任何无限小位移上的元功表达式②等于零：

$$\delta A=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_o+\boldsymbol{L}_o\boldsymbol{\omega})dt=0. \tag{2}$$

由矢量 $\boldsymbol{v}_o$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的任意性可知，当而且只有当

$$\boldsymbol{F}=0,\quad \boldsymbol{L}_o=0 \tag{3}$$

时，等式(2)才成立。等式(3)即自由剛体平衡的必要充分条件。

仿此可得非自由剛体的平衡条件。例如，假設点 O 是固定的，則 $\boldsymbol{v}_o=0$，因而等式(2)变为 $\delta A=\boldsymbol{L}_o\boldsymbol{\omega}dt=0$。于是，由矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的任意性即得所需求的平衡条件：$\boldsymbol{L}_o=0$。

---

① 伽利略把“力学金律”的論证归功于亚里司多德。虚位移的一般表述首次見之于約翰·伯努利的著作(1717年)。

② 等式 $\delta A=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_o+\boldsymbol{L}_o\boldsymbol{\omega})dt$ 可以按如下方式得到：以 $\boldsymbol{F}_i$ 表示作用在剛体各点的力，$\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$ 分别表示力 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots)$ 作用点的矢徑(由物体上 O 点所引出的)和速度，并以符号×表示矢量积，于是，便有

$$\delta A=\sum_i \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{v}_i dt=\sum_i \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_o+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)dt=$$

$$=\left[\left(\sum_i \boldsymbol{F}_i\right)\boldsymbol{v}_o+\boldsymbol{\omega}\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\right]dt.$$

但是，按牛頓第三定律，剛体内力的主矢量和主矩是等于零的，因此，

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F},\quad \sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{L}_o.$$

如果剛体只能繞固定軸 u(其单位矢量为 e)轉动，则等式(2)变为 $\delta A = L_0 \omega e dt = 0$ 的形式，于是，由 ω 的任意性得平衡条件 $L_u = 0$；这里 $L_u = L_0 e$ 是外力对于軸 u 的主矩。

2. 求在重力作用下任意非自由剛体系統的平衡条件。以 M 表示全部物体的总质量，以 z_c 表示剛体系統重心的鉛直坐标（假設 z 軸的方向鉛直向下)。于是，由等式(1)得

$$\delta A = Mg\delta z_c = 0,$$

因而系統的平衡条件具有如下形式：

$$\delta z_c = 0. \tag{4}$$

因此，在重力作用下，物体系統的平衡位置是：重心最低的位置、重心最高的位置、重心鉛直坐标取逗留值的其它任何位置("托里拆利原理")。

3. 两端固定的均匀重鏈在平衡时的形状。将均匀重鏈看作剛体(鏈环)系統，便可写出关系式(4)。以 Oxz 为鉛直平面，z 为鉛直軸(見图 9)则

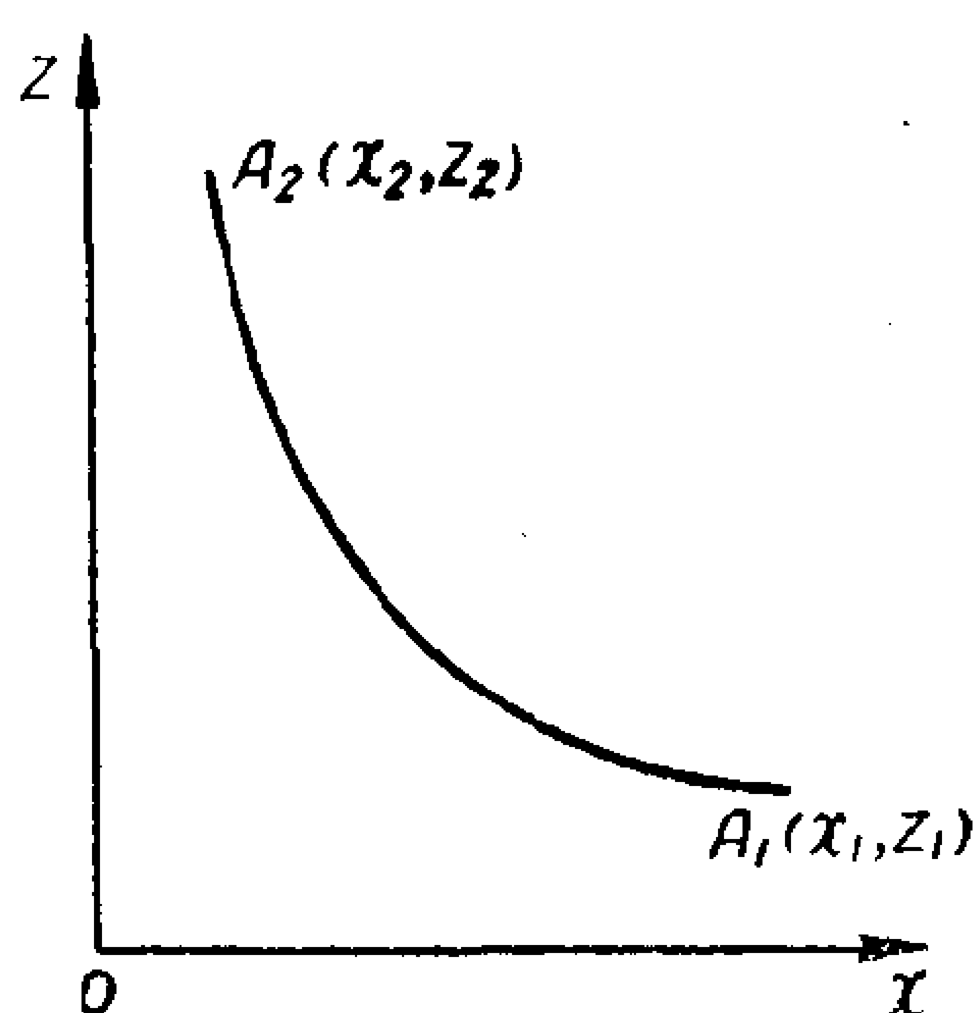


图 9.

$$z_c = \frac{\int z ds}{\int ds},$$

但由于在移动时鏈长不变，所以条件(4)可以写成

$$\delta \int z ds = 0 \tag{5}$$

的形式。这个关系式还可以改写为：

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz = 0. \tag{5'}$$

由变分学可知，在通过已知两点的曲綫类 $x = f(z)$ 中，使积分

$$\int_{z_1}^{z_2} F\left(z, x, \frac{dx}{dz}\right) dz$$

取极值(严格地說应当是逗留值)的曲綫，也就是使

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} F dz = 0$$

的曲綫，应当满足微分方程①

① 这个方程曾由欧拉得到。关于它的推导見第 85 頁的脚注和第 87 頁上的注。

$$\frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial x'}-\frac{\partial F}{\partial x}=0\quad\left(x'=\frac{dx}{dz}\right). \tag{6}$$

在我們的討論中 $F=z\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$。因此，方程(6)有如下的形式：

$$\frac{d}{dz}\left[z\frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}\right]=0. \tag{7}$$

由此即得

$$z\frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}=c,$$

即

$$\frac{dx}{dz}=\frac{c}{\sqrt{z^2-c^2}}, \tag{8}$$

其中 c 是任意常数。将上式积分即得悬鏈綫方程：

$$z=\frac{c}{2}\left[e^{(x-\alpha)/c}+e^{-(x-\alpha)/c}\right], \tag{9}$$

式中任意常数 c 和 α 由固定端条件来决定。因此，均匀重鏈平衡时的形状为悬鏈綫①。

4. 不变的平面图形可以用其上二点 A 和 B 沿固定曲綫滑动，而固定曲綫位于平面图形所在的平面內。我們来說明在怎样的力 $\boldsymbol{F}$ 作用下这图形才能处于平衡(图 10)。

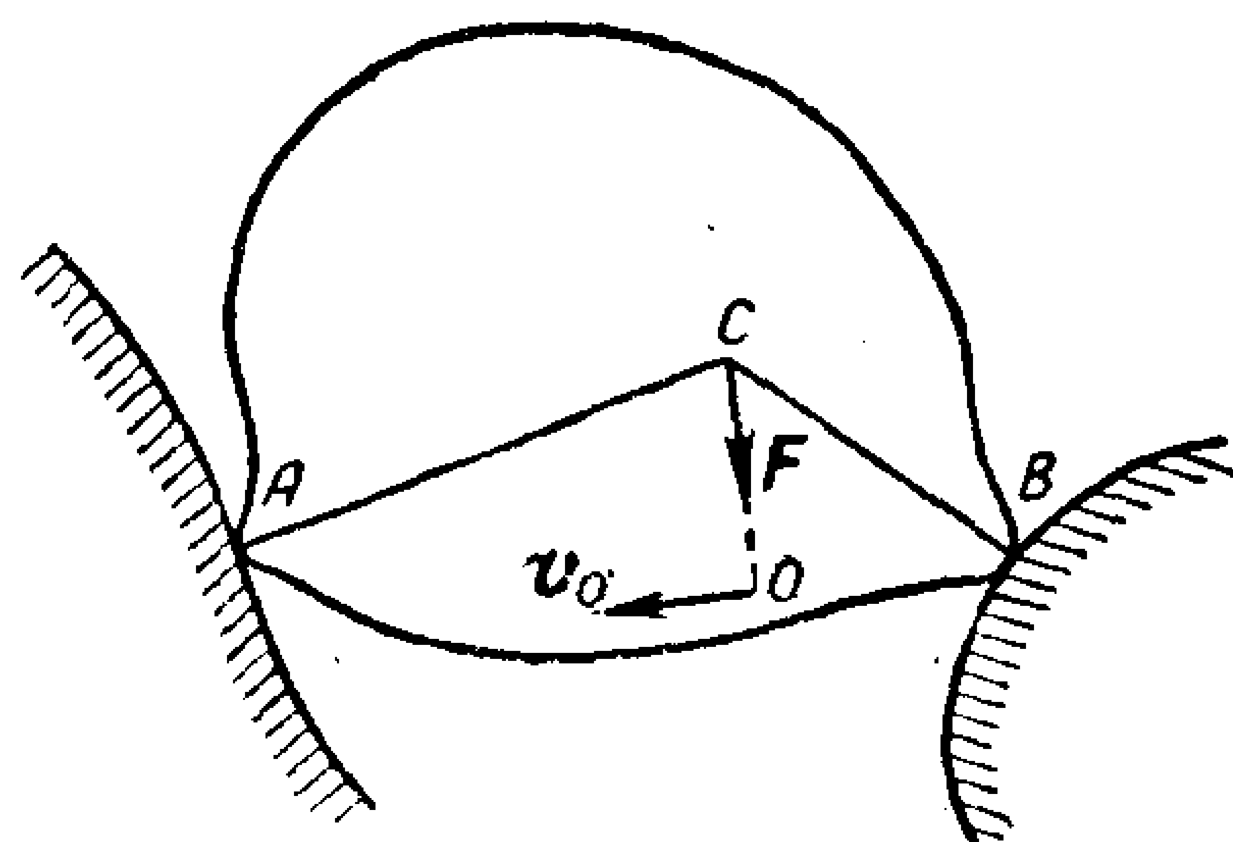


图 10.

因为作用在图形上的力，除主动力 $\boldsymbol{F}$ 而外，还有二个沿曲綫法綫方向的反力，因此，这三个力的作用綫应該相交于一点。換句話說，力 $\boldsymbol{F}$ 的作用綫应当通过曲綫上 A、B 两点法綫的交点，即力 $\boldsymbol{F}$ 的作用綫应該通过图形的瞬时速度中心 C②。

① 伽利略曾經认为均匀重鏈平衡时的形状是拋物綫。伽利略的錯誤由惠更斯予以更正。

② 力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向可以是任意的。

由可能位移原理也可以得到同样的結果。事实上,若以 O 表示力 $\boldsymbol{F}$ 作用綫上的任意一点,则由条件 $\delta A=\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_o dt=0$ 可知 $\boldsymbol{v}_o\perp\boldsymbol{F}$,因之,图形的瞬时速度中心位于力 $\boldsymbol{F}$ 的作用綫上。

5. 若干几何应用。我們从預备知識开始。假設在平面上給定了一条曲綫 C 和一点 P(在特殊情况下,曲綫 C 可以退化为一个点)。由点 P 作曲綫 C 的法綫,并以 r 記曲綫 C 沿其法綫到点 P 的距离,即 $r=P_0P$(图 11)。今在 P 点沿法綫 P_0P 作用一力 $\boldsymbol{F}$;如果力 $\boldsymbol{F}$ 的方向沿 P_0 到 P 的方向,我們就认为 $F>0$,反之,就认为 $F<0$。力 $\boldsymbol{F}$ 的元功等于 $\delta A=\boldsymbol{F}(d\boldsymbol{r}_0+d\boldsymbol{r})$。但 $d\boldsymbol{r}$ 是两个元位移之和:一个是沿直綫 P_0P 的位移(这个位移的大小等于 dr),另一个則是由于直綫 P_0P 的轉动而引起的 P 点位移。后一个位移和 $d\boldsymbol{r}_0$ 一样,都垂直于直綫 P_0P,即垂直于力 $\boldsymbol{F}$ 的作用綫。因此①,

$$\delta A=F dr. \tag{10}$$

假設在同一平面上有 n 条曲綫 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 和一点 P。以 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 表示由点 P(沿法綫)到这些曲綫②的距离(图 12 对应于 $n=2$ 的情况)。我們来看在同一平面上由方程③

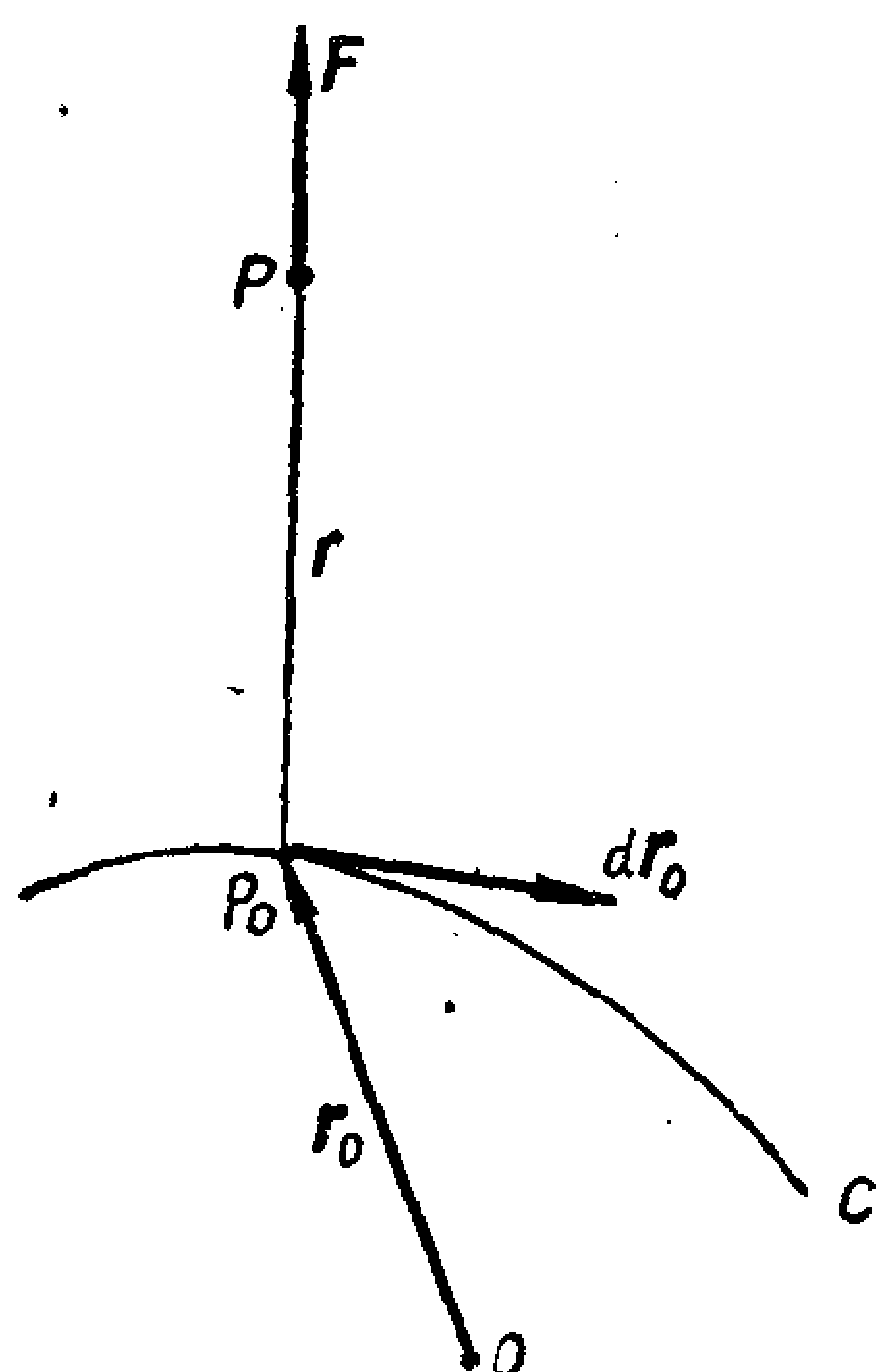


图 11.

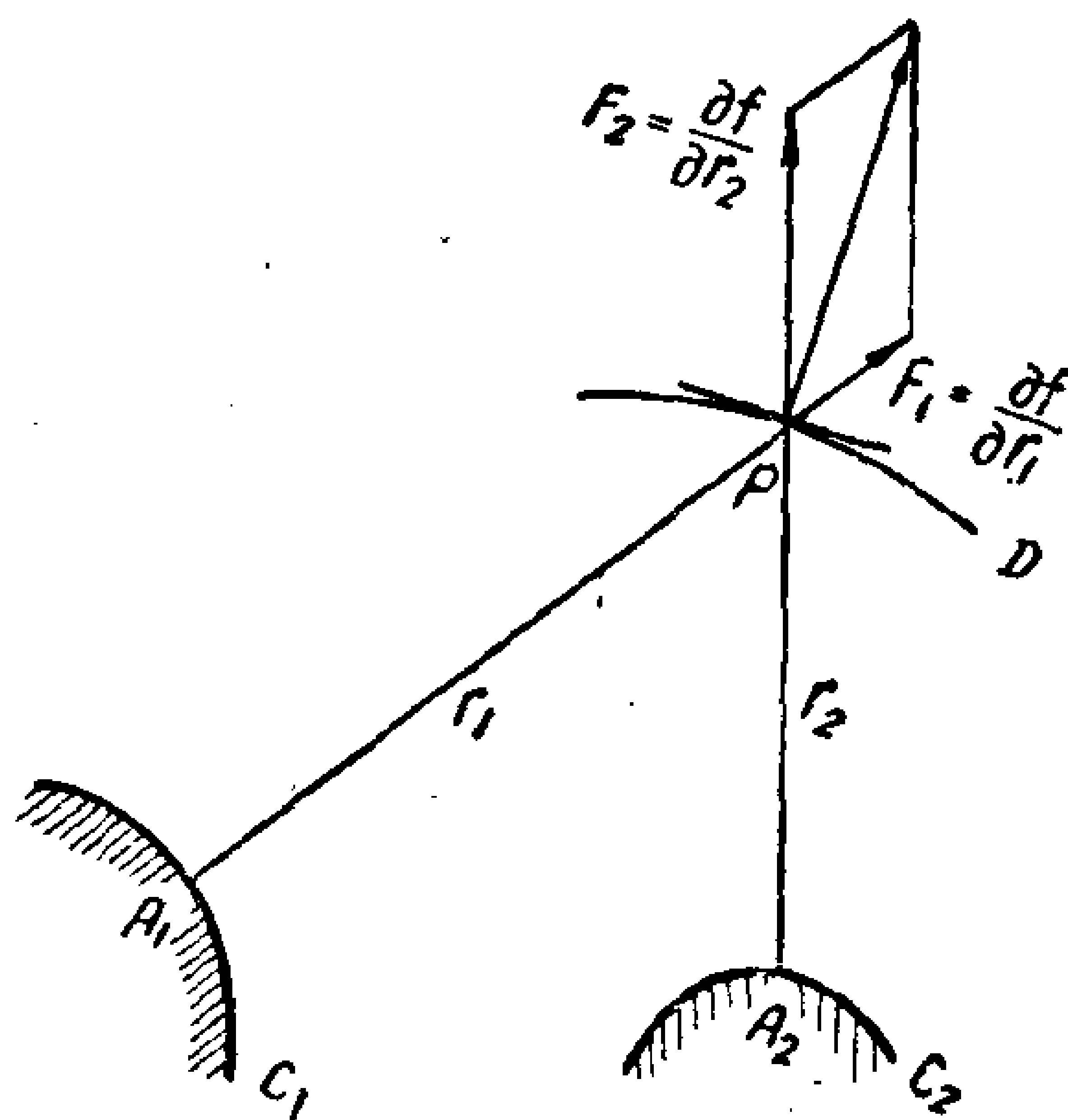


图 12.

① 当曲綫 C 退化为一点时,公式(10)就給出关于中心力之功的表达式。

② 曲綫 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 中的某些条(或全部)可以退化为点。

③ 量 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 中的每一个都是点 P 的两个笛卡尔坐标的函数,因此,方程(11)是一条平面曲綫。

$$f(r_1, r_2, \cdots, r_n)=0 \tag{11}$$

所确定的曲綫 D。

我們来指出怎样根据方程(11)作曲綫 D 上一点 P 的法綫。

当点 P 沿曲綫 D 作任何无限小位移时都有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial r_i}dr_i=0. \tag{12}$$

現在在 P 点沿各个法綫 r_i 分别作用一力 $F_i=\frac{\partial f}{\partial r_i}$ $(i=1, \cdots, n)$。于是，等式(12)便可以写作

$$\sum_{i=1}^{n}F_i dr_i=0.$$

根据前面的預备知識，这就表示当点 P 沿曲綫 D 作任意位移时，力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 所作之功之和为零。这說明可以沿光滑曲綫 D 移动的非自由质点，在力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 作用下，是处于平衡的。因此，力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 的合力沿曲綫 D 的法綫方向。

于是，对于由方程(11)所表示的曲綫 D 的法綫，我們得到了一个极为簡单的几何作图法。

現在来看几个特殊情况。

a) 曲綫 D 是椭圓的情况。此时 C_1 和 C_2 是二个点(椭圓的焦点)，方程(11)具有 $r_1+r_2-2a=0$ 的形式，$F_1=1, F_2=1$，椭圓的法綫是二焦点矢徑之間夹角的二等分綫(图 13)。

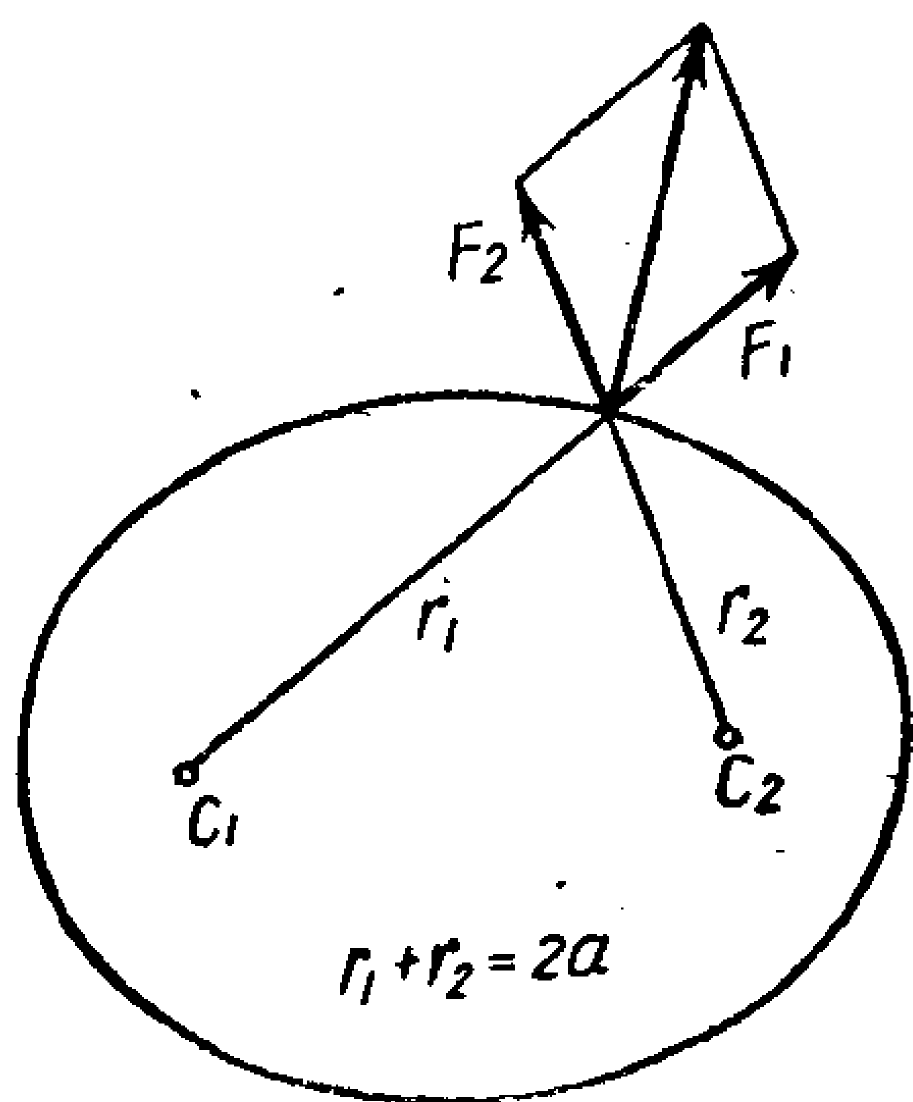


图 13.

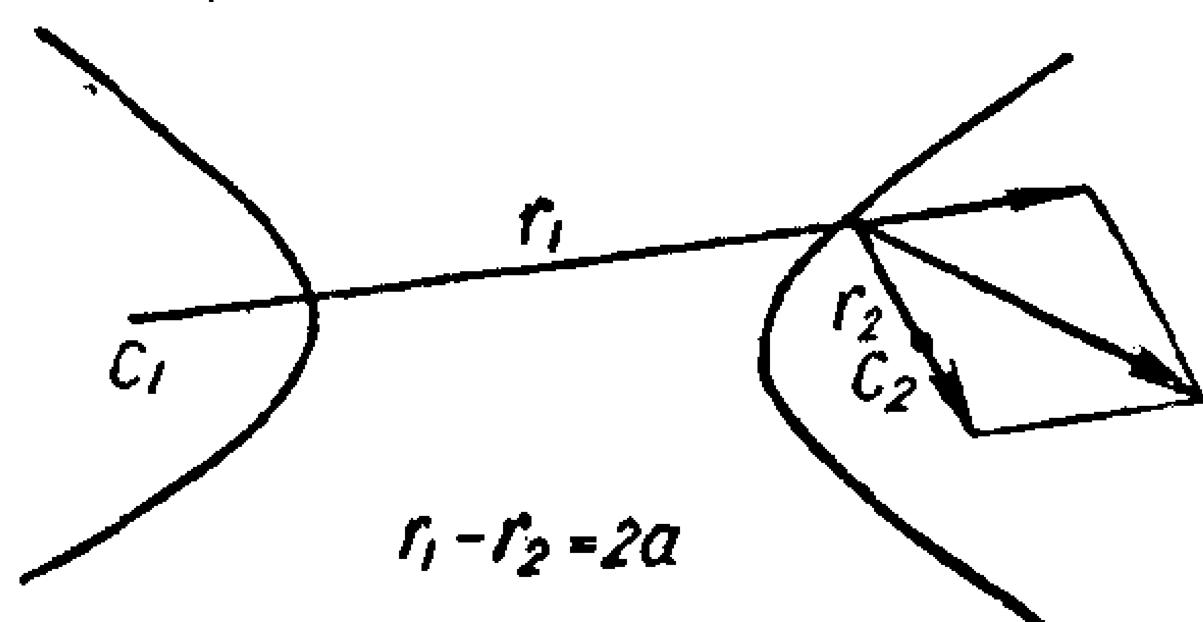


图 14

b) D是双曲綫的情况。双曲綫方程为: $r_1-r_2-2a=0, F_1=1, F_2=-1$, 由作图法不难看出(图 14), 双曲綫的切綫是二焦点矢徑夾角的二等分綫(而法綫則是焦点矢徑夾角的补角二等分綫)。

c) D 是拋物綫的情况(图 15)。此时 C_2 是直綫(准綫), 而 C_1 是一个点(焦点)。拋物綫的方程为: $r_1-r_2=0$。与双曲綫的情况一样, 由作图法可以看出, 拋物綫的切綫是焦点矢徑 r_1 和到准綫的垂綫 r_2 之間夾角的二等分綫。

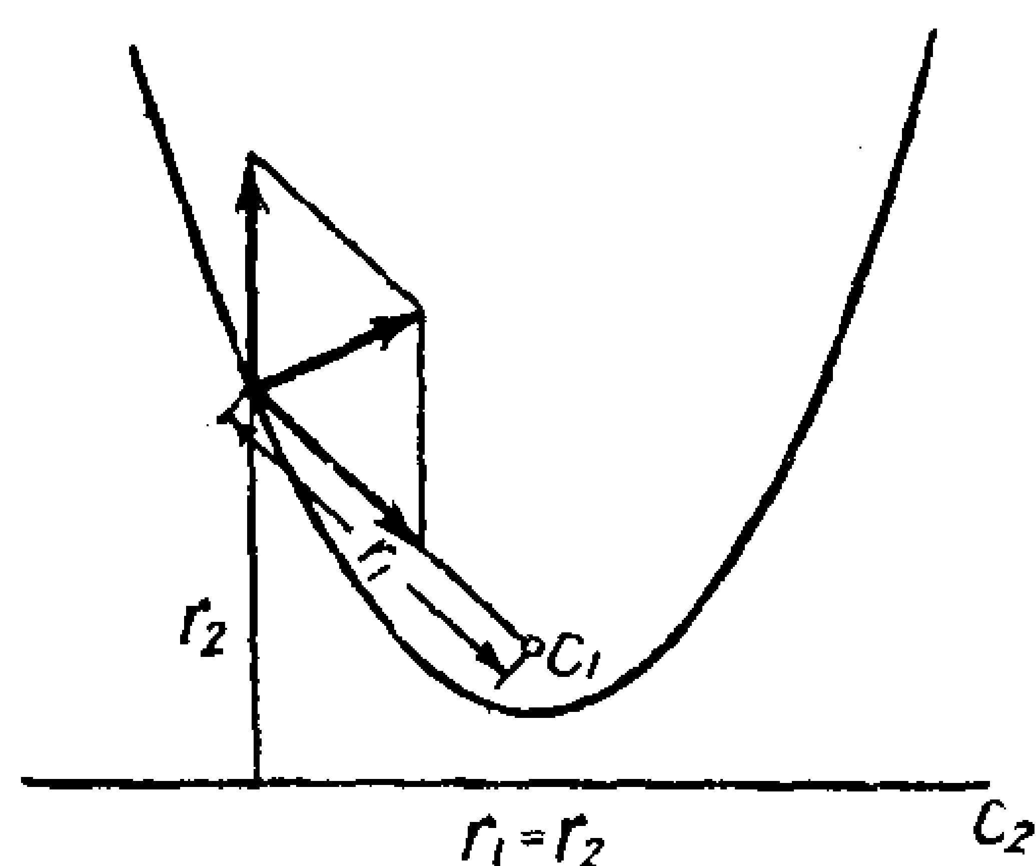


图 15.

表述虛位移原理的方程 (1) 乃是动力学普遍方程的特殊情况 [見第 13 頁上的方程(3)]。但是, 动力学普遍方程也可以看作表述虛位移原理的方程, 它表征出系統的这样一个平衡位置: 当我們把假想的慣性力 $-m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ 也算作主动力 $\boldsymbol{F}_\nu$ ($\nu=1, \cdots, N$)的一部分时所得到的正是这个位置。于是, 我們得到了达朗伯原理。

达朗伯原理. 如果在系統运动的任一位置上, 对作用在系統上的主动力系补加以假想的慣性力时, 則系統运动时的任一位置都可以看作平衡位置。

达朗伯原理使我們可以将解决静力学問題的方式、方法用于动力学問題。尤其是, 使我們可以用静力学方法来确定动反力。事实上, 在平衡位置, 反力 $\boldsymbol{R}_\nu$ 仅与 $\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu \boldsymbol{w}_\nu$ 方向不同:

$$\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu \boldsymbol{w}_\nu=-\boldsymbol{R}_\nu \quad (\nu=1, \cdots, N).$$

而这表明

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu=\boldsymbol{F}_\nu+\boldsymbol{R}_\nu \quad (\nu=1, \cdots, N),$$

也就是說, 用达朗伯原理确定的反力 $\boldsymbol{R}_\nu$ 就是所要求的动反力。因此, 对于前述达朗伯原理还可以作如下的补充:

将慣性力看做作用在系統各点上的补充主动力, 則給定的动力学問題就可以看作是一个新的静力学問題, 这个新問題中的静

反力也就是原来动力学問題中所要求的反力。

我們用以下的几个例子来說明靜力学方法在求解动力学問題上的应用。

例題 1. 装了水的煤水車以加速度 $\boldsymbol{w}$ 运动。要求确定水面的位置和形状。

当无加速度时，水面是水平的。此时水面在其每一点都和作用在这个点上的体积力（水的重力）的方向垂直。如果在每个元质量 dm 上附加以假想的慣性力 $d\boldsymbol{J}=-dm\boldsymbol{w}$ 之后，这个靜力学結論也可以应用于煤水車作加速运动的情况。在这种情况下，水面仍然是个平面，这个平面垂直于两个体积力的合力方向：一个是鉛直方向的重力 $dm\boldsymbol{g}$，另一个是水平方向的慣性力 $-dm\boldsymbol{w}$（图 16）。水面与水平方向有一傾斜角度 φ，而 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{w}{g}$。

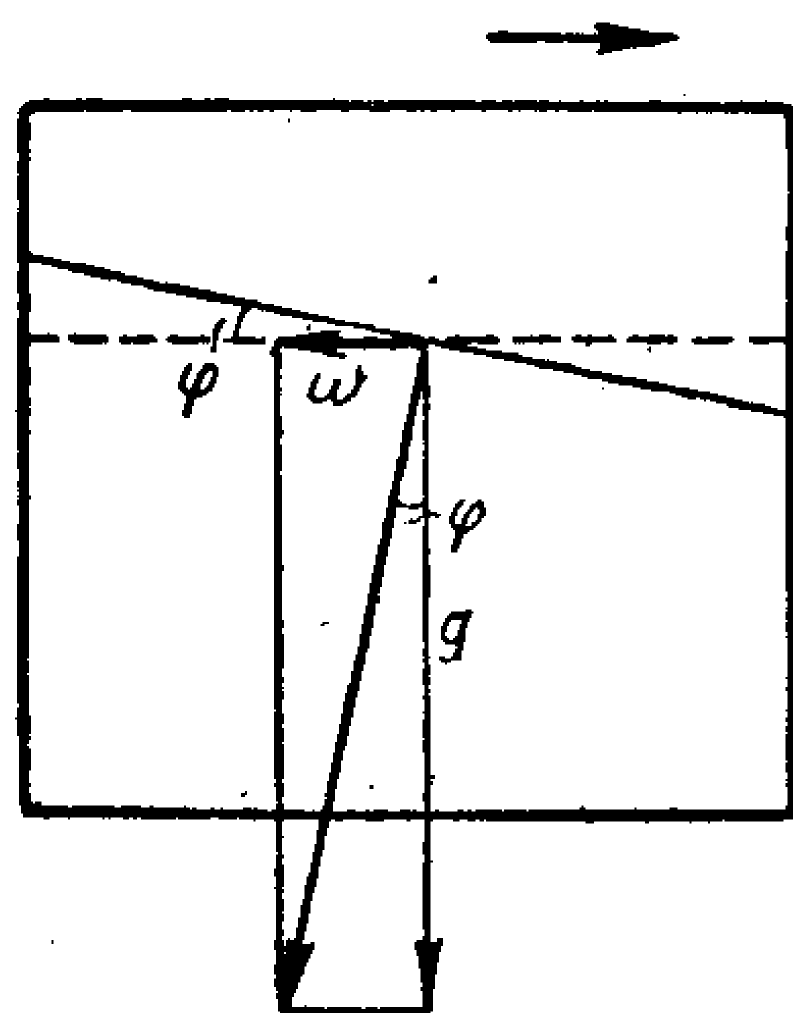


图 16.

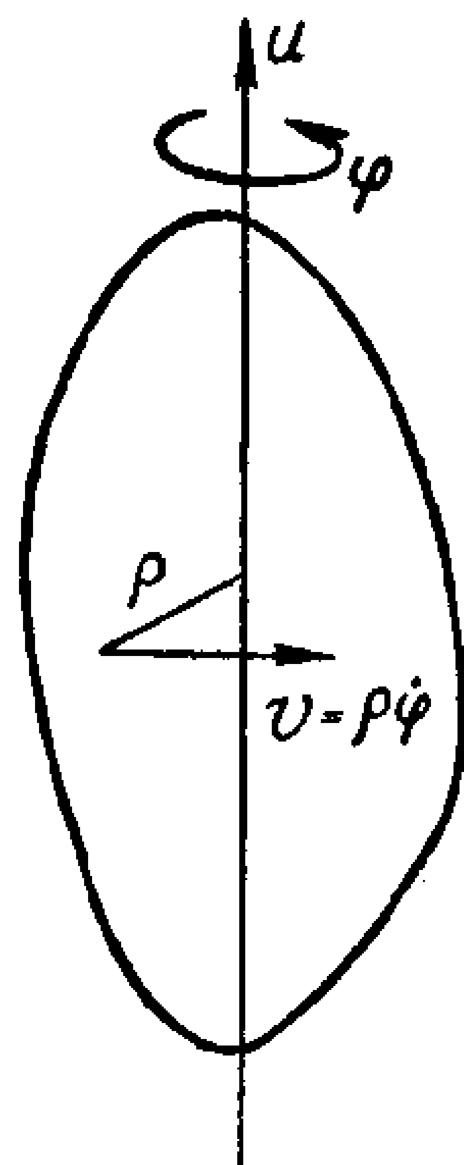


图 17.

2. 写出剛体繞定軸轉动的微分方程（图 17）。在每个元质量 dm 上加上假想的慣性力 $-dm\boldsymbol{w}$。我們来計算这些慣性力对轉軸的主矩

$$-\int dm\rho\ddot{\varphi}\rho=-\ddot{\varphi}\int\rho^2 dm=-I\ddot{\varphi},$$

式中 $I=\int\rho^2 dm$ 是物体对轉軸 u 的轉动慣量。以 L_u 表示作用在物体上的外力对軸 u 的主矩①。于是，按照达朗伯原理，物体在合力矩 $L_u-I\ddot{\varphi}$ 的作用

① 內力的主矩等于零。

下就可以处于平衡。因此，这个合力矩应当等于零(見第19頁)，卽

$$I\ddot{\varphi}=L_u.$$

3. 水平均勻軸以等角速度 ω 轉动。垂直于轉軸軸綫安装一均勻质量的偏心圓盘，圓盘到轉軸两端軸承的距离相等。求当軸轉动时的軸承压力。

我們来看圓盘上各个元质量 dm 的惯性力 $dm\omega^2\boldsymbol{r}$(图 18)。这是个汇交力系，各个力的方向都是背离轉軸的。这些力的合力等于 $\boldsymbol{J}=\omega^2\int \boldsymbol{r}dm=$ $=M_1\omega^2\boldsymbol{r}_C$，其中 M_1 是圓盘的质量，$\boldsymbol{r}_C=\boldsymbol{OC}$ (O 是圓盘与軸綫的交点，C 是圓盘的几何中心)。現在来用达朗伯原理确定軸在以下三种力作用下軸承上的靜压力：1) 軸的重量 $M\boldsymbol{g}$、2) 圓盘的重量 $M_1\boldsymbol{g}$、3) 力 $\boldsymbol{J}=M_1\omega^2\boldsymbol{r}_C$①。

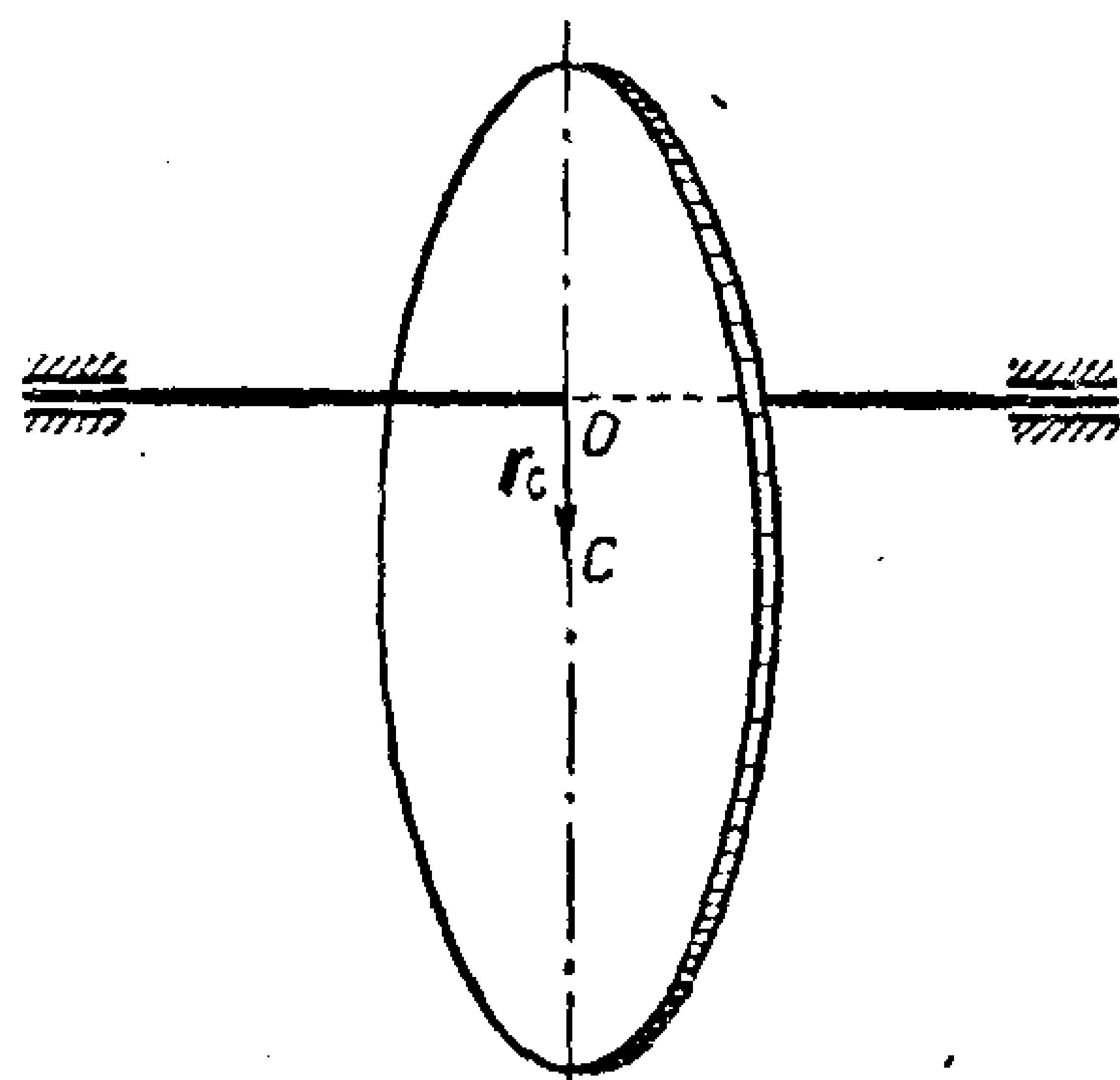


图 18.

每个軸承上的压力 $\boldsymbol{N}$ 可以由如下的公式来确定：

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{2}(M+M_1)\boldsymbol{g}+\frac{1}{2}M_1\omega^2\boldsymbol{r}_C.$$

当圓盘的几何中心 C 位于 O 点之下时，力 N 具有最大值

$$N_{\max}=\frac{1}{2}(M+M_1)g+\frac{1}{2}M_1\omega^2 OC.$$

§5. 完整系統・独立坐标・广义力

假設給定了一个由 N 个质点 P_ν 組成的完整系統。各点的矢徑 $\boldsymbol{r}_\nu=x_\nu\boldsymbol{i}+y_\nu\boldsymbol{j}+z_\nu\boldsymbol{k}$② $(\nu=1,\cdots,N)$。加在系統上的有限約束为

$$f_\alpha(t,\boldsymbol{r}_\nu)=0\ \ (\alpha=1,\cdots,d), \tag{1}$$

或(等价的写法)

$$f_\alpha(t,x_\nu,y_\nu,z_\nu)=0\ \ (\alpha=1,\cdots,d). \tag{1'}$$

我們将假定 $3N$ 个变数 $x_\nu, y_\nu, z_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 的 d 个函数 f_α

---

① 轉軸上各元惯性力的合力等于零，所以未予考慮。

② $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是惯性坐标系統各軸 Ox, Oy, Oz 的单位矢量。

是独立的[1]；t 在这里被看作参数。因此，我們可以由方程(1')将 d 个坐标解为时間 t 和其余 $3N-d$ 个坐标的函数，并将这 $3N-d$ 个坐标看作确定系統在时刻 t 的位置的独立变量。

但是，并不一定要取笛卡尔坐标作为这些独立变量。可以将所有的 $3N$ 个笛卡尔坐标以 $n=3N-d$ 个独立参数 $q_1, \cdots, q_n$ 和 t 的函数形式表出：

$$\left.\begin{aligned} x_\nu&=\varphi_\nu(t, q_1, \cdots, q_n), \quad y_\nu=\psi_\nu(t, q_1, \cdots, q_n), \\ z_\nu&=\chi_\nu(t, q_1, \cdots, q_n) \quad (\nu=1, \cdots, N). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

当以这些函数代入約束方程(1')时，方程(1')就变为恒等式。此外，我們假定系統在給定时刻为約束所容許的任何位置，都可以从給 $q_1, \cdots, q_n$ 以一定的值而由等式(2)得到。

等式(2)和如下的矢量等式是等价的：

$$\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{r}_\nu(t, q_1, \cdots, q_n) \quad (\nu=1, \cdots, N). \tag{2'}$$

假定数量函数(2)[因而，矢量函数(2')]是連續且可微的。

就完整系統而言，当以最少的 q_i，通过公式(2)能够将系統的一切可能位置包括无余时，这些 q_i 的个数和系統的自由度 $n==3N-d$ 相等(見第8頁)。

公式(2)或(2')中的量 $q_1, \cdots, q_n$ (n 是自由度)称为系統的独立广义坐标。

对于每一时刻 t，系統的可能位置和 n 維坐标空間 $(q_1, \cdots, q_n)$ 中某区域内的点之間建立起了一一对应的关系。系統在时刻 t 的每一位置都有空間 $(q_1, \cdots, q_n)$ 中表示系統这个位置的点与之对应。与系統运动相对应的則是坐标空間 $(q_1, \cdots, q_n)$ 中的点的运动。

---

[1] 在相反的情况下，例如，当有形如

$$f_d=\Omega(f_1, \cdots, f_{d-1}, t)$$

的关系存在时，則約束之一(在此即 $f_d=0$)或者与其余的約束矛盾[当 $\Omega(0, \cdots, 0, t)\neq 0$ 时]，或者是其余約束的推論[当 $\Omega(0, \cdots, 0, t)\equiv 0$ 时]。

如果全体約束都是平稳的(平稳系統),則时間 t 不显含于方程(1′)。因之,总可以找到这样的一些坐标 $q_1, \cdots, q_n$, 使得在方程(2) 中也不显含时間 t。往后,对于平稳系統,我們总是假定独立坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 正是这样选取的。于是,对于平稳系統,公式(2)和(2′)具有如下形式:

$$x_\nu=\varphi_\nu(q_i),\quad y_\nu=\psi_\nu(q_i),\quad z_\nu=\chi_\nu(q_i)\quad(\nu=1,\cdots,N),\tag{3}$$

或

$$\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{r}_\nu(q_i)\quad(\nu=1,\cdots,N).\tag{3′}$$

例題 1. 在平面里运动的双摆有两个自由度(图 19)。可以选角 φ 和角 ψ 作为独立坐标 q_1 和 q_2。

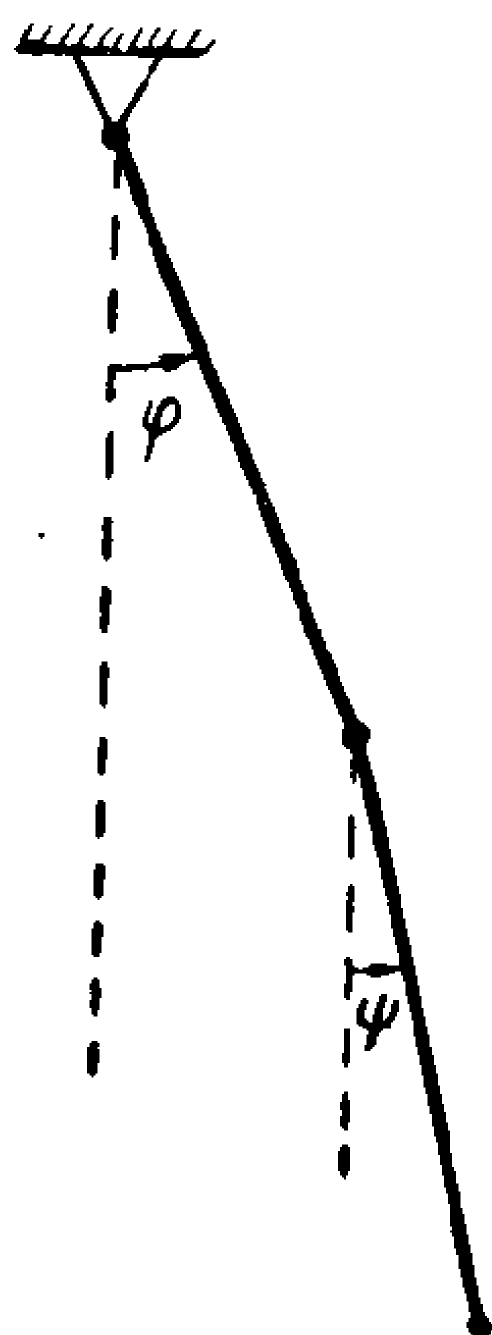


图 19.

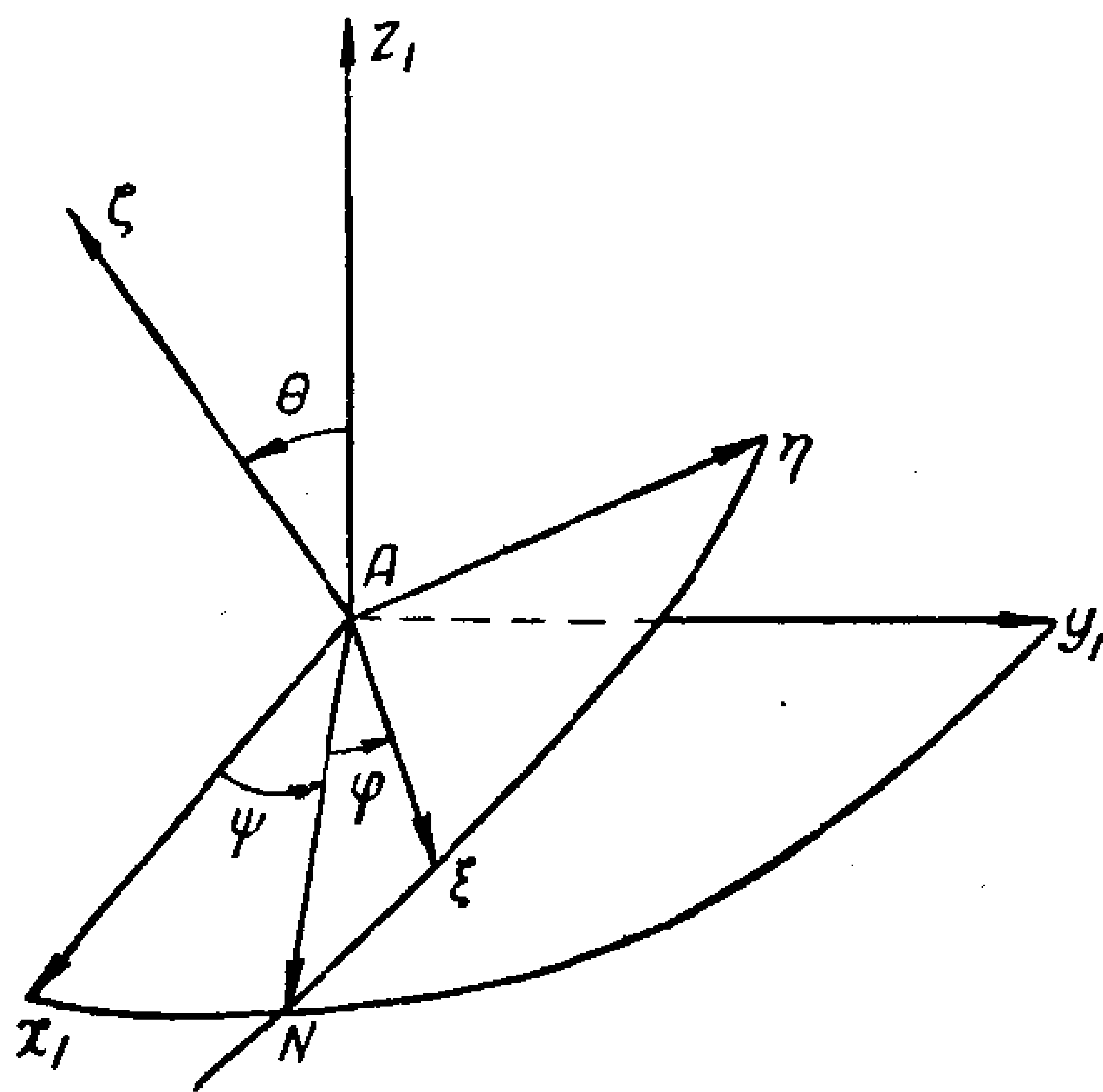


图 20.

2. 自由刚体有 6 个自由度。作为独立坐标,可以取物体上任意一点 A 的三个笛卡尔坐标 x_A, y_A, z_A 和三个欧拉角 ψ, θ 和 φ, 这三个欧拉角决定了固联在物体上的軸系 $A\xi\eta\zeta$ 相对于固定坐标軸系 $Oxyz$ 的轉动。

欧拉角可按如下方式确定(图 20)。由 A 点引三个軸 Ax_1, Ay_1, Az_1 分别和軸 Ox, Oy, Oz 平行且同向。平面 Ax_1y_1 和平面 $A\xi\eta$ 的交綫 AN 称为結綫①。Az_1 軸和 $A\zeta$ 軸之間的夹角 θ 叫做"章动角"; Ax_1 軸和 AN 軸之間的

① AN 軸的方向是这样定的: Az_1 軸沿最小角繞 AN 軸轉到 $A\zeta$ 軸时,轉动方向是反时針的。

夹角 ψ 叫做“进动角”; AN 軸与 $A\xi$ 軸間的夹角 φ 叫做“自轉角”。

三面体 $Oxyz$ 沿軸 Ox, Oy, Oz 分别平行移动 x_A, y_A, z_A 便到 $Ax_1y_1z_1$ 的位置。依次繞 Az_1 軸轉过一角度 ψ, 繞 AN 軸轉过一角度 θ, 繞 $A\zeta$ 軸轉过一角度 φ 三面体 $Ax_1y_1z_1$ 便轉到了 $A\xi\eta\zeta$ 的位置。

因此, $x_A, y_A, z_A, \psi, \theta, \varphi$ 的值就决定了三面体 $A\xi\eta\zeta$ 相对于三面体 $Oxyz$ 的位置, 即决定了給定剛体相对于原坐标軸系的位置。

剛体上的任意一点可由其坐标 ξ, η, ζ 确定。这个点的 x, y, z 坐标可以写作量 $x_A, y_A, z_A, \psi, \theta, \varphi$ 的函数。例如, 由图 20 不难看出

$$z = z_A + \xi \sin\varphi \sin\theta + \eta \cos\varphi \sin\theta + \zeta \cos\theta.$$

对于 x 和 y 也有与此相仿的、略为复杂的公式成立①。这些公式都是公式(3)的特殊情况。它們不明显地包含时間 t。因之, 自由剛体是平稳系統。

我們注意, 当剛体运动时, 量 $x_A, y_A, z_A, \psi, \theta, \varphi$ 是在变的, 同时, 前面所讲的, 把由 $Oxyz$ 到 $A\xi\eta\zeta$ 的过程可以分解为三个平动和三个轉动的这种分解, 使我們得到一个关于剛体作任意复杂(合成)运动的概念, 这个复杂运动由六个簡单运动組成: 三个(沿 Ox, Oy, Oz 軸的)平动和三个(繞 $Az_1, AN, A\zeta$ 軸的)純轉动。由于复杂运动的角速度等于各分角速度的矢量和, 所以

$$\omega = \omega_\psi + \omega_\theta + \omega_\varphi, \tag{4}$$

其中 $\omega_\psi, \omega_\theta, \omega_\varphi$ 分别沿軸 $Az_1, AN, A\zeta$ 的方向, 而且 $\omega_\psi = \dot{\psi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$.

3. 自由质点有三个自由度。作为独立坐标可以取点的笛卡尔坐标或任何其它坐标。在取柱坐标 r, ψ, z 作为 q_1, q_2, q_3 的情况下, 公式(2)有如下形式(图 21):

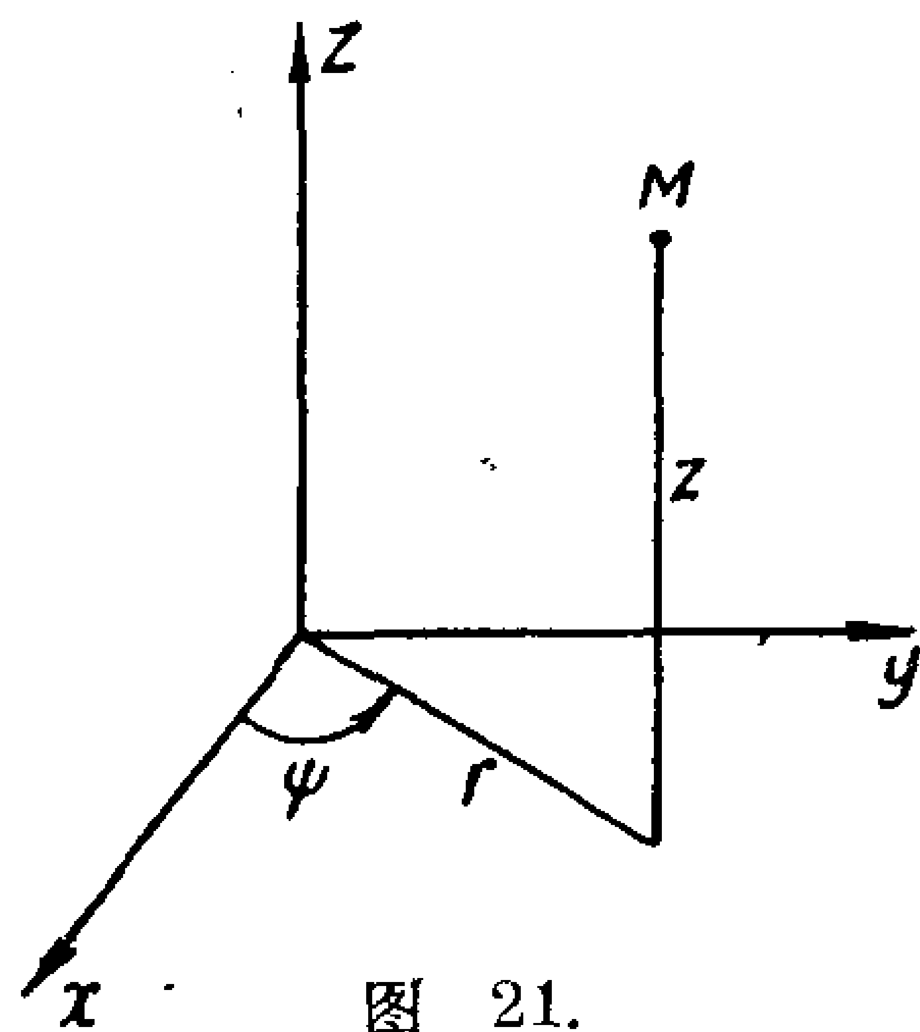


图 21.

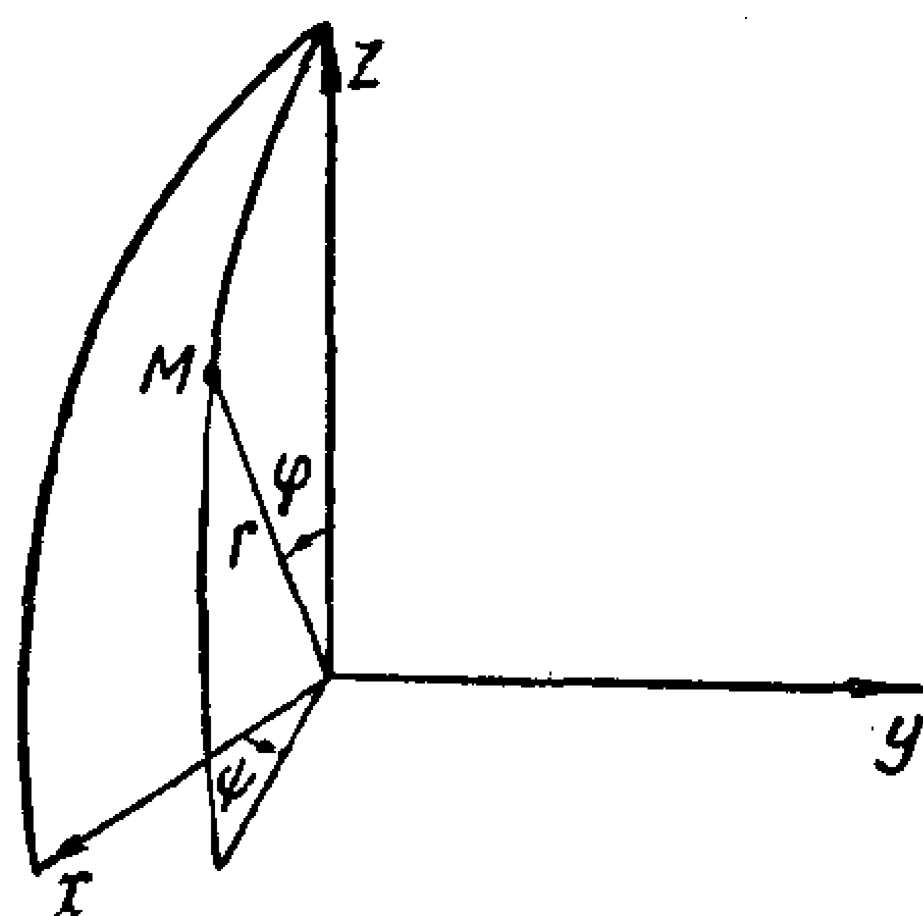


图 22.

① 例如, 可以参看 Суслов Г. К., Теоретическая механика, М.—Л., 1944, 第 77 頁和 83 頁。

$$x=r\cos\psi,\quad y=r\sin\psi,\quad z=z. \tag{5}$$

在球坐标 r,φ,ψ 的情况下(图 22),代替公式(5)有:

$$x=r\cos\psi\sin\varphi,\quad y=r\sin\psi\sin\varphi,\quad z=r\cos\varphi. \tag{6}$$

4. 在动球面

$$(x-at)^2+(y-bt)^2+(z-ct)^2=r^2$$

上的非自由质点 M。此时 $n=2$, 可以取球面上的"經度"和"緯度"作独立坐标(图 23):

$$x=at+r\cos q_1\cos q_2,\quad y=bt+r\sin q_1\cos q_2,\quad z=ct+r\sin q_2.$$

与每个坐标 q_i 相对应的有它自己的广义力 $Q_i(i=1,\cdots,n)$。广义力可按下述方式定义。我們来看主动力在虛位移上的元功:

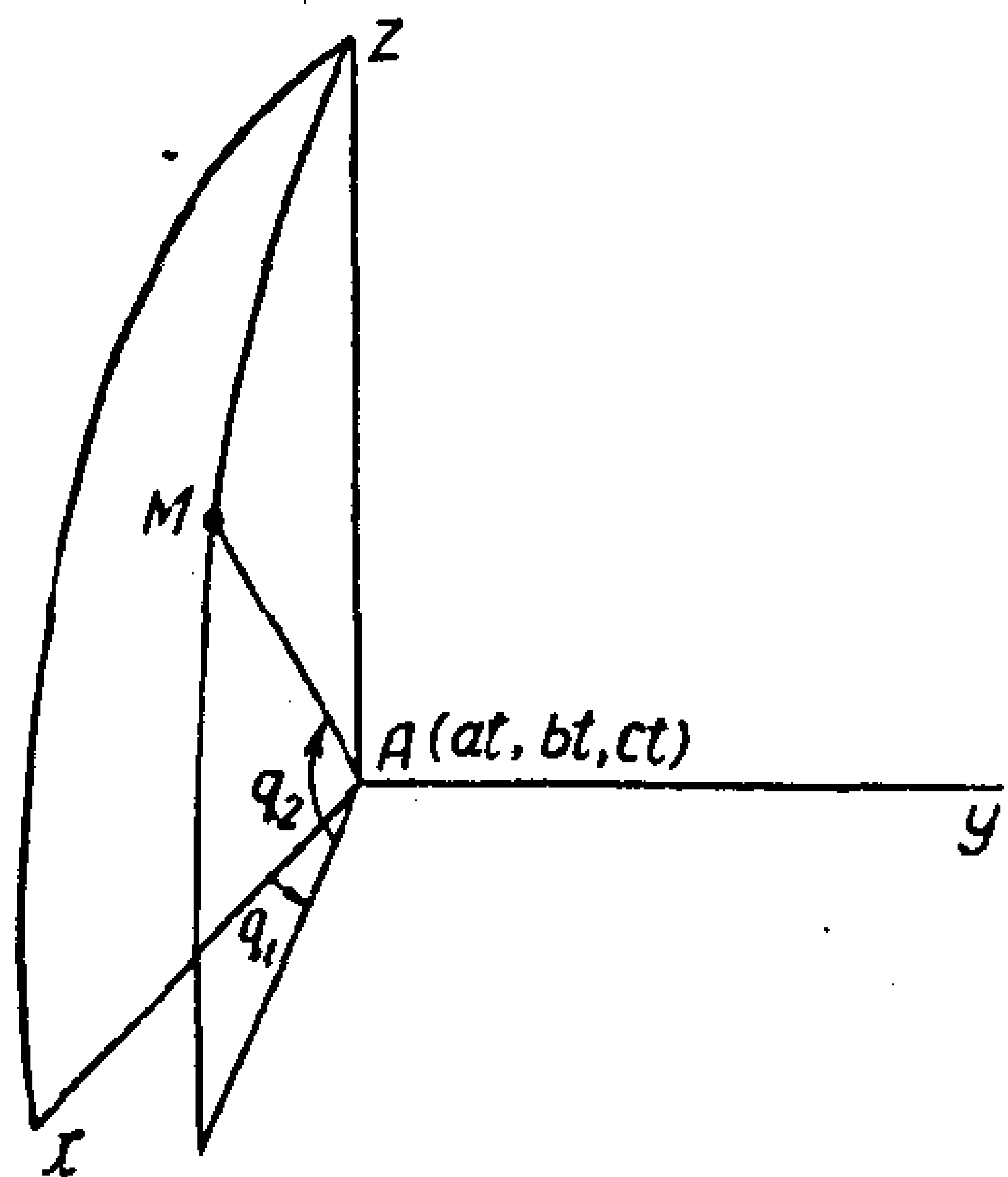


图 23.

$$\delta A=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu. \tag{7}$$

但虛位移 $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ 乃是函数 $\boldsymbol{r}_\nu(t,q_i)$ 的虛微分[即当 t 被固定("凝固")时的微分][①]:

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i(\nu=1,\cdots,N). \tag{8}$$

将表达式(8)代入公式(7)的右端, 并以独立坐标 q_i 的任意的元增量 $\delta q_i(i=1,\cdots,n)$ 来表示主动力在虛位移上的元功:

---

① 事实上,将函数 $\boldsymbol{r}_\nu(t,q_i)(\nu=1,\cdots,N)$ 代入約束方程 $f_\alpha(t,\boldsymbol{r}_\nu)=0(\alpha=1,\cdots,d)$,則約束方程成为恒等式。将所得恒等式中的 t 固定,并逐項微分之,即得:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}_\nu}\delta\boldsymbol{r}_\nu=0\ (\alpha=1,\cdots,d), \tag{*}$$

其中 $\delta\boldsymbol{r}_\nu\ (\nu=1,\cdots,N)$ 是虛微分。但方程 (*) 和第 6 頁上方程 (7) 的前 d 个是一样的,这些方程确定了完整系統的虛位移。因此, 矢徑的虛微分是完整系統中点的虛位移。

$$\delta A=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_{\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\nu}}{\partial q_i}\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_{\nu}\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\nu}}{\partial q_i}\right)\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i, \quad (9)$$

式中 δq_i 的系数——“广义力 Q_i”——由如下的等式确定:

$$Q_i=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_{\nu}\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\nu}}{\partial q_i} \quad (i=1, \cdots, n). \quad (10)$$

应当注意，实际上在求 Q_i 时并不利用公式(10)。为了确定 Q_i 我們給系統这样一个虛位移：仅使第 i 个坐标 q_i 得到某一增量，而其余的独立坐标保持不变。然后計算主动力在这样特别选取的位移上的功 δA_i。于是，$\delta A_i=Q_i\delta q_i$，因而

$$Q_i=\frac{\delta A_i}{\delta q_i}.$$

例題 5. 只能沿 x 軸平动的剛体。此时 $n=1$，可以取物体上任意一点 A 的横坐标 x 作为独立坐标。这时

$$\delta A=X\delta x, \quad (11)$$

式中 X 是作用在物体上的全部主动力在 x 軸上投影的和。显然，X 就是关于坐标 x 的广义力:

$$Q=X. \quad (12)$$

6. 仅能繞某固定軸 u 轉动的剛体。可取适当的轉角 φ 作独立坐标。于是，

$$\delta A=L_u\delta\varphi, \quad (13)$$

其中 L_u 是全体主动力对轉軸的力矩之和，而且，

$$Q=L_u. \quad (14)$$

7. 自由剛体。我們取剛体上任意一点 A 的三个坐标 x_A, y_A, z_A 和三个欧拉角 ψ, θ, φ 作为独立坐标(見第28—29頁上的例題2)。于是，根据等式(9)，

$$\delta A=Q_x\delta x+Q_y\delta y+Q_z\delta z+Q_\psi\delta\psi+Q_\theta\delta\theta+Q_\varphi\delta\varphi. \quad (15)$$

为了确定 Q_x，我們給物体一沿 x 軸之元位移。于是，$\delta y_A=\delta z_A=0$，$\delta\psi=\delta\theta==\delta\varphi=0$。因之，$\delta A=Q_x\delta x_A$。与等式(11)相比較卽得

$$Q_x=X.$$

与此相仿，$Q_y=Y$，$Q_z=Z$。这里的 X, Y, Z 是作用在物体上的全体主动力的主矢量在 x, y, z 軸上的投影。

現在再給物体这样一个元位移：仅使 ψ 角变，而保持量 $x_A, y_A, z_A, \theta, \varphi$ 不变。于是，得

$$\delta A = Q_\psi \delta\psi.$$

从另一方面来看，上述元位移正是物体繞 Az_1 軸的轉动。因此，按公式(13)，

$$Q_\psi = L_\psi,$$

其中 L_ψ 是所有主动力对 Az_1 軸之矩之和，而軸 Az_1 乃是实現轉角 ψ 的轉軸。

完全类似地可以得到 $Q_\theta = L_\theta, Q_\varphi = L_\varphi$，其中 L_θ 和 L_φ 是主动力对 AN 軸和 $A\zeta$ 軸之矩之和。

利用剛体上主动力的元功表达式(見第19頁)①

$$\delta A = \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{L}_A \boldsymbol{\omega} dt \tag{16}$$

也可以得到广义力的同样的表达式。式中 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{L}_A$ 是力系对极点 A 的主矢量和主矩。由于 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi$(見公式(4))，其中 $\omega_\psi = \dot{\psi}, \omega_\theta = \dot{\theta}, \omega_\varphi = \dot{\varphi}$，而矢量 $\boldsymbol{L}_A$ 在矢量 $\boldsymbol{\omega}_\psi, \boldsymbol{\omega}_\theta, \boldsymbol{\omega}_\varphi$ 方向的投影分別等于 $L_\psi, L_\theta, L_\varphi$，于是，由公式(16)得

$$\delta A = X\delta x_A + Y\delta y_A + Z\delta z_A + L_\psi\delta\psi + L_\theta\delta\theta + L_\varphi\delta\varphi. \tag{17}$$

将表达式(17)和(15)加以比較即可得出广义力的表达式。

現在假設系統的某位置是平衡位置。按照虛位移原理，当而且只有当下式成立时才是可能的：

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0. \tag{18}$$

但独立坐标 q_i 的增量 δq_i 可以是完全任意的。因此，等式(18)和如下的一組等式是等价的：

$$Q_i = 0, \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{19}$$

所以，完整系統的某位置是平衡位置的必要充分条件是：在此位置上全体广义力等于零。

---

① 因为我們在这里討論的是平稳系統，故可将符号 δ 改写为符号 d，反之也可以。因此，$d\boldsymbol{r}_A = \delta\boldsymbol{r}_A, \delta\psi = d\psi = \dot{\psi}dt, \delta\theta = \dot{\theta}dt, \delta\varphi = \dot{\varphi}dt$。

例題 8. 按照等式(19)，自由剛体的平衡条件可以写作：

$$X=Y=Z=0,\quad L_\psi=L_\theta=L_\varphi=0 \tag{20}$$

(見前例)。这里的 X, Y, Z 是作用在物体上的外力主矢量$\boldsymbol{R}$在坐标軸上的投影，$L_\psi, L_\theta, L_\varphi$ 是这些力的主矩 $\boldsymbol{L}_A$ 在不共面的三个軸上的投影。因此，数量等式(20)与矢量等式

$$\boldsymbol{R}=0,\ \boldsymbol{L}_A=0$$

是等价的。此即自由剛体平衡的必要充分条件，这些条件我們曾在第 19 頁上得到过。

§ 6. 独立坐标下的第二类拉格朗日方程

我們从动力学普遍方程

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu\boldsymbol{w}_\nu)\delta\boldsymbol{r}_\nu=0 \tag{1}$$

出发，来着手推导独立坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 下完整系統的运动微分方程。

在上一节中已經得到主动力的元功表达式为：

$$\delta A=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i, \tag{2}$$

其中

$$Q_i=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\quad(i=1, \cdots, n). \tag{3}$$

可以完全类似地写出慣性力 $-m_\nu\boldsymbol{w}_\nu(\nu=1, \cdots, N)$ 的元功：

$$\delta A_J=-\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\boldsymbol{w}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu=-\sum_{i=1}^{n}Z_i\delta q_i, \tag{4}$$

和表达式(3)相似，这里

$$Z_i=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\boldsymbol{w}_\nu\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}-\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}$$

$$(i=1,\cdots,n).\tag{5}$$

但速度

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\tag{6}$$

綫性地依賴于 $\dot{q}_k(k=1,\cdots,n)$。所以，由上式可得

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\quad(i=1,\cdots,n;\nu=1,\cdots,N).\tag{7}$$

另一方面，由同一个等式(6)我們得到:

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i\partial t}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\tag{8}$$

$$(i=1,\cdots,n;\nu=1,\cdots,N).$$

因之，Z_i 的表达式(5)还可以写成

$$Z_i=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial\dot{q}_i}-\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\tag{9}$$

$$(i=1,\cdots,n)$$

的形式，其中 T 是系統的动能:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2.\tag{10}$$

由动力学普遍方程(1)，得:

$$\delta A+\delta A_J=0,\tag{11}$$

或按等式(2)和(4)将它写作

$$\sum_{i=1}^{n}(Q_i-Z_i)\delta q_i=0\quad(i=1,\cdots,n).\tag{12}$$

因为坐标 $q_i(i=1,\cdots,n)$ 的增量 δq_i 是完全任意的，所以当而

且只有当其全体 δq_i 的系数等于零时等式(12)才成立。因之，动力学普遍方程(12)和方程組

$$Z_i = Q_i \quad (i=1, \cdots, n) \tag{13}$$

等价。根据关系式(9)，方程組(13)可以写成如下形式：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, \cdots, n). \tag{14}$$

方程(14)称为第二类拉格朗日方程或独立坐标下的拉格朗日方程。

量 $\dot{q}_i (i=1, \cdots, n)$ 称为广义速度。系統各点速度 $\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 可按公式(6)以广义速度(以及独立坐标和时間)表出。量 $\ddot{q}_i (i=1, \cdots, n)$ 称为广义加速度。

拉格朗日方程(14)的左端，在完成 $\frac{d}{dt}$ 的运算之后，將包含时間 t、广义坐标 q_i、广义速度 $\dot{q}_i$ 和广义加速度 $\ddot{q}_i (i=1, \cdots, n)$。拉格朗日方程右端的广义力 Q_i $(i=1, \cdots, n)$ 通常都是 t, q_k, $\dot{q}_k (k=1, \cdots, n)$ 的已知函数①：

$$Q_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k) \quad (i=1, \cdots, n). \tag{15}$$

拉格朗日方程(14)构成一个包含 n 个二阶常微分方程的方程組，組中有 n 个依賴于独立变量 t 的未知函数 q_i。这个方程組的阶数等于 $2n$。应当注意，决定 n 自由度完整系統运动的微分方程的阶不可能低于 $2n$，因为，根据变量 q_i 和 $\dot{q}_i (i=1, \cdots, n)$ 的初值的任意性，方程組的解至少应該包含 $2n$ 个任意常数。因此，独立坐标下的拉格朗日方程組具有最小可能的阶。

在非自由系統的情况下，还必須确定反力 $\boldsymbol{R}_\nu (\nu=1, \cdots, N)$，但反力是不包含在拉格朗日方程中的，这也正是拉格朗日方程的

① 見本节公式(3)和(6)以及第9頁上的公式(10)和第27頁上的公式(2′)。

主要优点。将拉格朗日方程积分之后，求得函数 $q_i(t)\,(i=1,\cdots,n)$ [将函数 $q_i(t)$ 代入第 27 頁上的公式 (2′)] 就可以确定 $\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{r}_\nu(t)$，因而也就可以确定 $\boldsymbol{v}_\nu=\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$, $\boldsymbol{w}_\nu=\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 以及 $\boldsymbol{F}_\nu(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)$ $(\nu=1,\cdots,N)$。于是，未知反力就可以由下式求得：

$$\boldsymbol{R}_\nu=m_\nu\boldsymbol{w}_\nu-\boldsymbol{F}_\nu\ (\nu=1,\cdots,N). \tag{16}$$

在自由质点系統的情况下，拉格朗日方程乃是任何坐标系統中运动方程的完整而紧凑的写法。

例題　1. 刚体繞定軸 u 轉动。我們取轉角 φ 作为独立坐标。对应的广义力 Q 等于轉动力矩 L_u（見第 31 頁上的例題 6）。另外，$T=\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$，其中 I 是物体对轉軸的轉动慣量。

在拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q$$

中，以

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=I\dot{\varphi},\quad \frac{\partial T}{\partial\varphi}=0,\quad Q=L_u$$

代入之，便得到

$$I\ddot{\varphi}=L_u.$$

这就是刚体繞定軸的轉动微分方程。

2. 在平面里运动的双数学摆（图 24）。

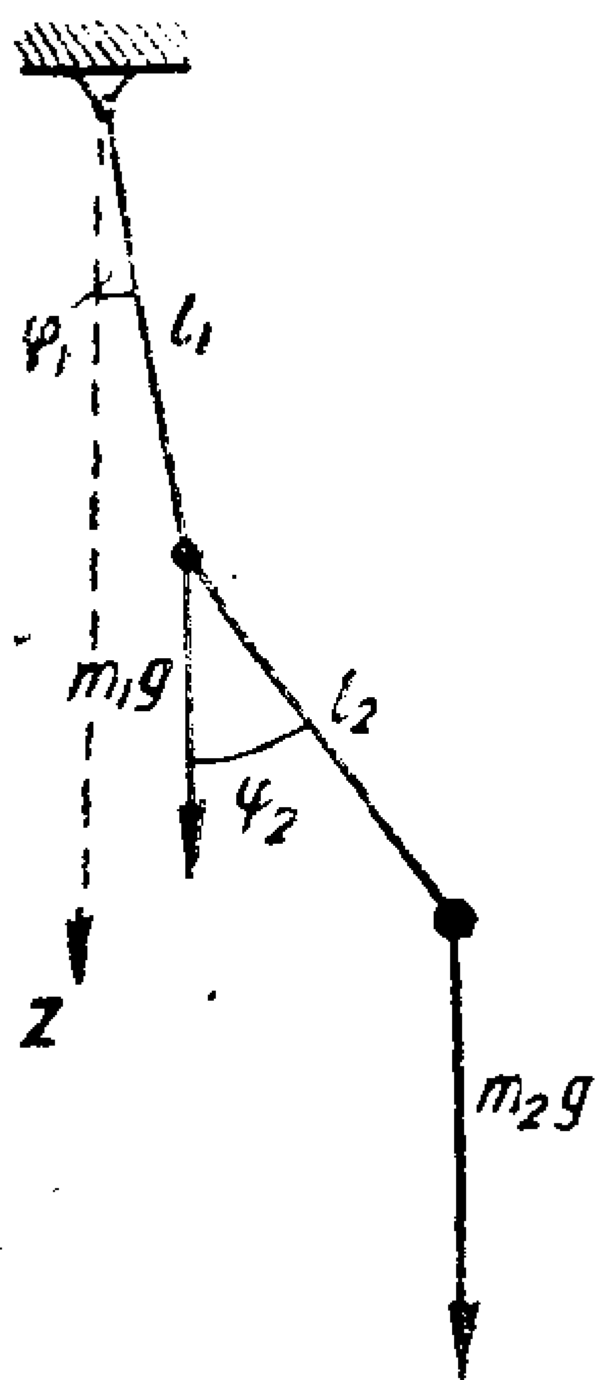


图 24.

它的元功表达式为：

$$\delta A=m_1g\delta z_1+m_2g\delta z_2,$$

其中 $z_1=l_1\cos\varphi_1$, $z_2=l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2$.

算出 δz_1 和 δz_2 即得

$$\delta A=-(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1-m_2gl_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2,$$

$$Q_1=-(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1,\ Q_2=-m_2gl_2\sin\varphi_2.$$

另外，

$$T=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\varphi}_1^2+l_2^2\dot{\varphi}_2^2+2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2]$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2.$$

第一个拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}-\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}=Q_1$$

有如下形式:

$$\frac{d}{dt}[(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)]+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)=$$

$$=-(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1.$$

建議讀者自己导出对应于坐标 φ_2 的第二个拉格朗日方程。

3. 求自由质点在球坐标中的运动微分方程（見第29頁上的例題3和第29頁上的图22）。点的速度等于如下三个速度的矢量和：1）徑向速度；2）由于向徑在子午面内的轉动而引起的速度；3）由于子午面轉动而引起的速度。这三个速度是相互垂直的，故

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+r^2\sin^2\varphi\dot{\psi}^2).$$

为了得到广义力 Q_r，我們給质点一沿向徑的位移。此时 $\delta A_r=F_r\delta r$，其中 F_r 是作用力$\boldsymbol{F}$在向徑方向的投影。因之，$Q_r=F_r$。

現在給点一沿子午綫的元位移。于是，有 $\delta A_\varphi=F_\varphi r\delta\varphi$，其中 F_φ 是力 $\boldsymbol{F}$ 在子午綫切綫上的投影①。因此，

$$Q_\varphi=F_\varphi r.$$

与此相仿，

$$Q_\psi=F_\psi r\sin\varphi,$$

式中 F_ψ 是力 $\boldsymbol{F}$ 在緯綫切綫上的投影。

关于坐标 r 的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r$$

有如下的形式:

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2-r\sin^2\varphi\dot{\psi}^2)=F_r.$$

对于坐标 φ 和 ψ，得方程:

$$m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}-r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\psi}^2)=F_\varphi,$$

$$m(r\sin\varphi\ddot{\psi}+2\sin\varphi\dot{r}\dot{\psi}+2r\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{\psi})=F_\psi.$$

我們得到了自由质点在球坐标中的三个运动微分方程。

① 子午綫和緯綫的切綫各沿坐标 φ 和 ψ 的增长方向。

§7. 拉格朗日方程的研究

为了建立拉格朗日方程，首先需要求得动能作为时間 t、广义坐标 q_i 和广义速度 $\dot{q}_i(i=1,\cdots,n)$ 的函数表达式。它可以写成如下的一般形式:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{r}_\nu^2=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k+\sum_{i=1}^{n}a_i\dot{q}_i+a_0. \tag{1}$$

这里的系数 a_{ik}, a_i, a_0 都是 $t, q_1,\cdots,q_n$ 的函数，由下列等式决定:

$$a_{ik}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}\ (i,k=1,\cdots,n)^{①}, \tag{2}$$

$$a_i=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\ (i=1,\cdots,n), \tag{3}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2. \tag{4}$$

公式(1)表明，完整系統的动能是关于广义速度的二次(多項式)函数:

$$T=T_2+T_1+T_0, \tag{5}$$

其中

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k,\ \ T_1=\sum_{i=1}^{n}a_i\dot{q}_i,\ \ T_0=a_0. \tag{6}$$

在平稳系統的情况下，如像在 §1 中指出的那样，由于时間 t 不明显地包含在 r_ν 和 q_i 之間的关系式中，所以，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}=0\ \ (\nu=1,\cdots,N).$$

---

① 由公式(2)可以看出 $a_{ik}=a_{ki}(i,k=1,\cdots,n)$。

于是，由等式(3)和等式(4)可知

$$a_0=0,\quad a_i=0\quad(i=1,\cdots,n),$$

因而

$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

故平稳系統的动能是广义速度的二次齐次函数(二次型)。

应当注意的是，任何(平稳的或非平稳的)完整系統的二次型 T_2 总是非奇异的，即 T_2 的系数行列式是异于零的：

$$\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n}\neq 0. \tag{7}$$

事实上，如果

$$\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n}\equiv 0,$$

則綫性齐次方程組

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\lambda_k=0\quad(i=1,\cdots,n) \tag{8}$$

有实的非零解。

依次以 λ_i 乘組(8)各方程，并按 i 从 1 到 n 相加，則由公式(2)得：

$$0=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\lambda_i\lambda_k=\sum_{i,k=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}\right)\lambda_i\lambda_k=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\right)^2.$$

由此便有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}=0\quad(\nu=1,\cdots,N). \tag{9}$$

这 N 个矢量等式可以换成 $3N$ 个数量等式：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\lambda_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_i}\lambda_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\lambda_i=0 \tag{9'}$$

$$(\nu=1,\cdots,N).$$

等式(9′)表明，雅科毕函数矩陣

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_1}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial x_1}{\partial q_n}\\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial y_1}{\partial q_n}\\ \frac{\partial z_1}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial z_1}{\partial q_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial x_N}{\partial q_n}\\ \frac{\partial y_N}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial y_N}{\partial q_n}\\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial z_N}{\partial q_n}\end{matrix}\right\| \tag{10}$$

的各列是綫性相关的，即这个函数矩陣的秩 ρ 小于 n。因之，在依賴于 n 个变量 $q_1,\cdots,q_n$(将 t 看作参数）的 $3N$ 个函数 $x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N$ 中有 ρ 个是独立的，而且可以通过它們表出系統各点全部其余的笛卡尔坐标。但是这和系統独立坐标的最少个数等于自由度 n 是矛盾的，因为 $\rho<n$。因此，不等式(7)成立[①]。

不等式(7)所表示的关于二次型 T_2 的系数的那个性质是很重要的，今后我們将不止一次地要用到它。应当注意，由于恒有 $T_2\geqslant 0$ （T_2 是当約束被“凝固”时系統的动能），所以由不等式(7)

① 在个别（奇异）点上，函数矩陣(10)的秩可能小于 n。在这些奇异点上 $\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n}=0$是可能的。在我們今后的討論中将系統的这种奇异位置除外。

便可以断定* 二次型 $T_2=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ 是正定的，即 $T_2\geqslant 0$，且只有当全体 $\dot{q}_i(i=1,\cdots,n)$等于零时才有 $T_2=0$。因此，关于系数 a_{ik} 有如下的塞尔維司特不等式①:

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \cdots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0. \quad (11)$$

将动能的表达式(1)代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i\ \ (i=1,\cdots,n), \quad (12)$$

則得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\ddot{q}_k+(**)=Q_i(t,q_j,\dot{q}_j)\ \ (i=1,\cdots,n). \quad (13)$$

这里符号(**)表示那些不包含坐标对时間的二次导数的各項之和。右端同样也不包含二次导数，因为在一般情况下它們都是量 $t,q_j,\dot{q}_j(j=1,\cdots,n)$的函数。

由于 $\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n}\neq 0$，故方程(13)可按二次导数解出，写成

$$\ddot{q}_i=G_i(t,q_k,\dot{q}_k)\ \ (i=1,\cdots,n) \quad (14)$$

的形式。于是，如像常微分方程理論所告訴我們的那样，当右端的 G_i 满足某些条件时（这些条件在力学問题中总是假定被满足

*由 $T_2=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_k=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)^2=0$ 得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i=0$。以$m_\nu\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_k}$乘这等式两端，并按 ν 从 1 加到 N 即得 $\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i=0$。于是，由不等式(7)便有 $\dot{q}_i=0(i=1,\cdots,n)$。——譯者注

① 参閱，例如，Ф. Р. Гантмахер，矩陣論（柯召譯，高等教育出版社1955年版）第305頁。

的[①]，拉格朗日方程对于預先給定的（$t=t_0$时的）任何初始数据 $q_i^0, \dot{q}_i^0$ $(i=1,\cdots,n)$永远有解，而且有唯一的解。因此，完整系統的运动完全决定于系統的初始位置(q_i^0)和初始速度$(\dot{q}_i^0)$。

§8. 总能量变化定理·有勢力·迴轉仪力和耗散力

若广义力与广义速度无关，即

$$Q_i=Q_i(t, q_1, \cdots, q_n) \quad (i=1, \cdots, n), \tag{1}$$

并存在函数 $\Pi(t, q_1, \cdots, q_n)$使

$$Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1, \cdots, n), \tag{2}$$

則力 Q_i 称为有勢力，而函数 Π 称为力的势或势能。确定势 Π 的等式(2)可以写成如下形式[②]:

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i=-\delta \Pi. \tag{3}$$

現在我們来看除由势 Π 所确定的有势力而外，系統上还作用有非有势力

$$\widetilde{Q}_i=\widetilde{Q}_i(t, q_j, \dot{q}_j) \quad (i=1, \cdots, n) \tag{4}$$

时的一般情形。此时

$$Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}+\widetilde{Q}_i, \tag{5}$$

拉格朗日方程取如下形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}+\widetilde{Q}_i \quad (i=1, \cdots, n). \tag{6}$$

令E表示总能量，它等于势能与动能之和:

---

① 例如，函数 $G_i(i=1,\cdots,n)$有連續的一阶偏导数存在。

② 在計算虛微分 $\delta\Pi$ 时，时間 t 是預先固定的。因此，$\delta \Pi=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i$。

$$E=T+\Pi. \tag{7}$$

我們来計算它的导数$\frac{dE}{dt}$。为此，先来找$\frac{dT}{dt}$:

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)+\frac{\partial T}{\partial t}=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{8}$$

注意到 $T=T_2+T_1+T_0$, 并利用拉格朗日方程(6)，便得到[①]:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}(2T_2+T_1)+\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}-\widetilde{Q}_i\right)\dot{q}_i=$$

$$=2\frac{dT}{dt}-\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)+\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{d\Pi}{dt}-\frac{\partial \Pi}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i\dot{q}_i. \tag{9}$$

由此根据等式(7)最后就得到

$$\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i\dot{q}_i+\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)-\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{10}$$

右端的

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i\dot{q}_i=\frac{\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i dq_i}{dt}=\frac{\delta\widetilde{A}}{dt} \tag{11}$$

乃是非有势力 $\widetilde{Q}_i(i=1,\cdots,n)$ 的功率，而

---

① 对于m次齐次函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$有欧拉公式$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=mf$。将这公式用于函数 T_1 和 T_2 即得:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T_2,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=T_1.$$

也可以由第 38 頁上所导出的关于 T_2 和 T_1 的表达式直接来验证这些恒等式的正确性。

$$\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)-\frac{\partial T}{\partial t} \tag{12}$$

仅对于非平稳系統才异于零$\left(\text{对于平稳系統 } T_1=T_0=0,\ \frac{\partial T}{\partial t}=0\right)$。在势能 Π 明显地依賴于时間的情况下，最后一項也不等于零。

公式(10)决定了任意非平稳系統在运动时总能量的变化。下面我們来考查几种特殊情况:

a) 平稳系統。这时

$$\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i\dot{q}_i+\frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{13}$$

b) 平稳系統，且势能不显含时間。这时

$$\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i\dot{q}_i. \tag{14}$$

对于这种系統，总能量对时間的导数等于非有势力的功率。

c) 保守系統，即: 1)系統是平稳的; 2)所有的力均是有势的: 3)势能 Π 不明显地依賴于时間。根据等式(10)，对于保守系統則有:

$$\frac{dE}{dt}=0, \tag{15}$$

即对于系統的任何运动都有

$$E=\text{const}=h. \tag{16}$$

保守系統的总能量在运动中不变。

等式(16)称为能量积分。

如果非有势力的功率等于零:

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i\dot{q}_i=0, \tag{17}$$

则称其为迴轉仪力，而当其功率小于或等于零时①：

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i\dot{q}_i\leqslant 0, \tag{18}$$

则称之为耗散力。如果势能不显含 t，则由等式(14)和(17)得 $\frac{dE}{dt}=0$，因此，对于在迴轉仪力作用下的平稳系統仍然有能量积分

$$E=\text{const}.$$

如果在这样的系統上还作用有耗散力，则在系統运动时

$$\frac{dE}{dt}\leqslant 0,$$

即总能量在运动过程中减小②。在这种情况下，我們将系統本身称为耗散的。

---

① 在平稳系統的情况下，

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu d\boldsymbol{r}_\nu=\sum_{i=1}^{n}Q_i dq_i.$$

以 dt 除上式各项则得：

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\boldsymbol{v}_\nu=\sum_{i=1}^{n}Q_i\dot{q}_i. \tag{*}$$

因此，等式(17)表示出非有势力是迴轉仪力的条件

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\boldsymbol{v}_\nu=0,$$

而等式(18)则表示了耗散条件

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\boldsymbol{v}_\nu\leqslant 0.$$

在非平稳系統的情况下，等式(*)不成立。这时 $\delta\boldsymbol{r}_\nu=d\boldsymbol{r}_\nu-\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}dt$，由等式

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i \text{ 得 } \sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\left(\boldsymbol{v}_\nu-\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)=\sum_{i=1}^{n}Q_i\dot{q}_i.$$

② 有耗散力作用的情况下，发生能量消散（耗散）。这也正是“耗散力”这个名詞的由来。

在关系式(17)和(18)中广义力 $\widetilde{Q}_i$ 与广义速度有关。我們来看几个重要的特殊情形，在这些特殊情形中，广义力和广义速度的关系是綫性齐次的。

1°. 令

$$\widetilde{Q}_i=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}\dot{q}_k \quad (i=1,\cdots,n), \tag{19}$$

并設其系数矩陣$\|\gamma_{ik}\|$是反对称的:

$$\gamma_{ik}=-\gamma_{ki} \quad (i,k=1,\cdots,n)^{①}. \tag{20}$$

此时，力(19)是迴轉仪力。

事实上，在这种情况下，

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i\dot{q}_i=\sum_{i,k=1}^{n}\gamma_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii}\dot{q}_i^2+\sum_{i<k}^{1,\cdots,n}(\gamma_{ik}+\gamma_{ki})\dot{q}_i\dot{q}_k=0.$$

最后的等式表明系数矩陣$\|\gamma_{ik}\|$的反对称性不仅是使作用在平稳系統上的力(19)是迴轉仪力的充分条件，而且也是必要条件。

例題 1. 对于平稳系統，哥里奥利斯惯性力是迴轉仪力。事实上，作用在系統P_ν点上的哥里奥利斯惯性力由下面的公式确定:

$$\boldsymbol{F}_\nu=-2m_\nu(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_\nu).$$

这里 m_ν 是点 P_ν 的质量，$\boldsymbol{v}_\nu$ 是它在所討論的非慣性坐标系統中的速度，$\boldsymbol{\omega}$ 則是这个非慣性坐标系統相对于某慣性坐标系統的轉动角速度 $(\nu=1,\cdots,N)$。因之，

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\boldsymbol{v}_\nu=0.$$

2. 設在有固定点O的剛体上作用有主矩为$\boldsymbol{L}_O=I(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2)$的一些力，其中 I 是純量，$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$是物体的角速度。这些力是迴轉仪力，因为它們的功率等于零:

$$\boldsymbol{L}_O\boldsymbol{\omega}=0.$$

---

① 对于反对称矩陣$\|\gamma_{ik}\|$，恒有 $\gamma_{ii}=0(i=1,\cdots,n)$。

若剛体有动力对称軸，I 是对对称軸的轉动慣量，ω_2 是繞对称軸的自轉角速度，ω_1 是进动角速度，則力矩 $\boldsymbol{L}_O=I(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2)$称为迴轉仪力矩。因此，构成迴轉仪力矩的力是迴轉仪力①。

2°. 令

$$\tilde{Q}_i=-\sum_{k=1}^{n}b_{ik}\dot{q}_k\quad(i=1,\cdots,n),\tag{21}$$

并設其系数矩陣$\|b_{ik}\|$是对称的，即

$$b_{ik}=b_{ki}\quad(i,k=1,\cdots,n),\tag{21'}$$

而且二次型 $\sum\limits_{i,k=1}^{n}b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ 是正的，即

$$\sum_{i,k=1}^{n}b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k\geqslant 0.\tag{22}$$

于是，对于平稳系統，力 $\tilde{Q}_i$ 的功率等于

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{Q}_i\dot{q}_i=-\sum_{i,k=1}^{n}b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k\leqslant 0,\tag{23}$$

即 $\tilde{Q}_i$ 是耗散力。

此时，二次型

$$R=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k\tag{24}$$

称为瑞利耗散函数。不难看出，广义力(21)可由瑞利耗散函数按如下公式求得：

$$\tilde{Q}_i=-\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_i}\quad(i=1,\cdots,n).\tag{25}$$

若系統是平稳的，且势能不显含时間，則由等式(14)，(23)和(25)便有

$$\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\tilde{Q}_i\dot{q}_i=-2R.\tag{26}$$

① 此即"迴轉仪力"一詞之由来。

上式指出了瑞利函数的物理意义：总能量的减小速度等于瑞利函数的二倍。

如果瑞利函数(24)是广义速度的正定二次型，那我們就說能量完全耗散。此时，我們将系統称之为定耗散系統。按公式(26)，这种系統的总能量是严格递减的。

作为一个例子，我們来看作用在系統各质点上与其速度一次方成正比的介质阻力：

$$\boldsymbol{F}_\nu = -\beta \boldsymbol{v}_\nu \ (\nu = 1, \cdots, N). \tag{27}$$

此时

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \boldsymbol{v}_\nu = -2R, \tag{28}$$

其中

$$R = \frac{1}{2}\beta \sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2. \tag{29}$$

§9. 机电模拟

在这一节中我們将指出，怎样才能使分析力学方程不仅能够用于机械系統，而且也能用于电的和机电的系統。

我們来看一个由电感 L、电阻 R 和电容 C 串联而成的电路(图25)。电路中各元件上的电压 u(元件两端的电势差)和电流 i $\left(i = \frac{dq}{dt},\ q \text{ 是荷电量}\right)$之間的关系分别为：

$$u = L\frac{di}{dt},\quad u = Ri,\quad u = \frac{1}{C}\int i\,dt. \tag{1}$$

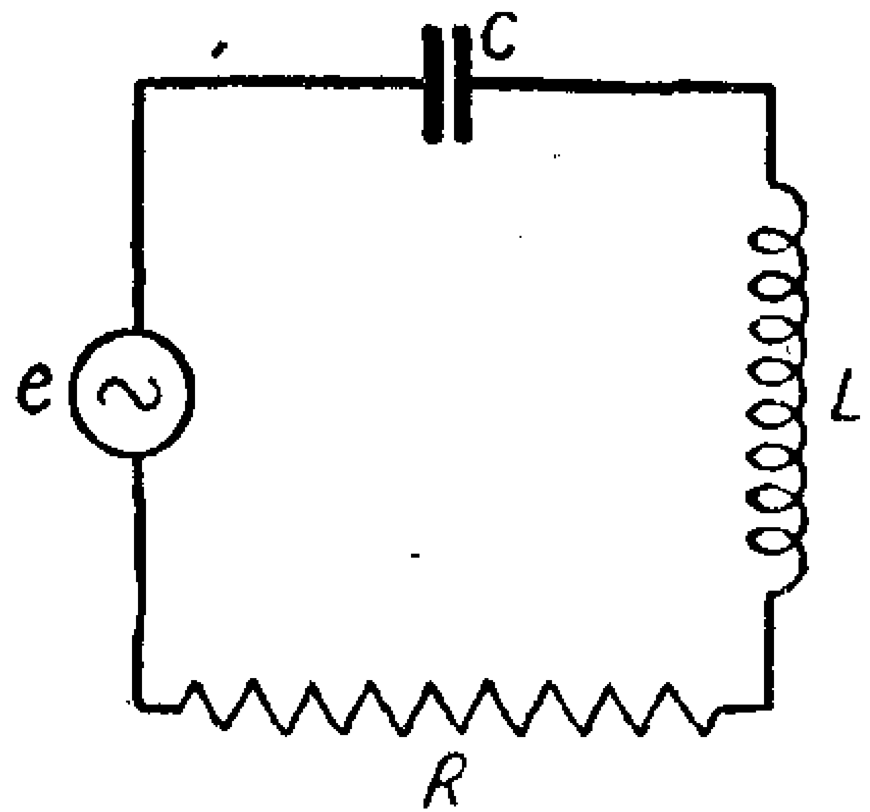


图　25.

如果在电路中还有电动势为 $e(t)$ 的外电源，则(1)使电动势之值等于各元件电压之和即得：

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t), \tag{2}$$

或

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=e(t). \tag{3}$$

这个方程乃是对机械振动方程

$$a\frac{d^2q}{dt^2}+b\frac{dq}{dt}+cq=Q(t) \tag{4}$$

的模拟。这里电感 L 相当于惯性系数(广义质量)a，电阻 R 相当于耗散系数 b，系数 $\frac{1}{C}$(C 是电容)相当于弹性系数 c，电量 q 对应于广义坐标 q，电动势 $e(t)$ 对应于广义力 $Q(t)$。

另一方面，在图 26 所示的电路中，通过电感、电阻和电容的电流将汇入一路，因此

$$\frac{u}{R}+\frac{1}{L}\int u dt+C\frac{du}{dt}=i(t). \tag{5}$$

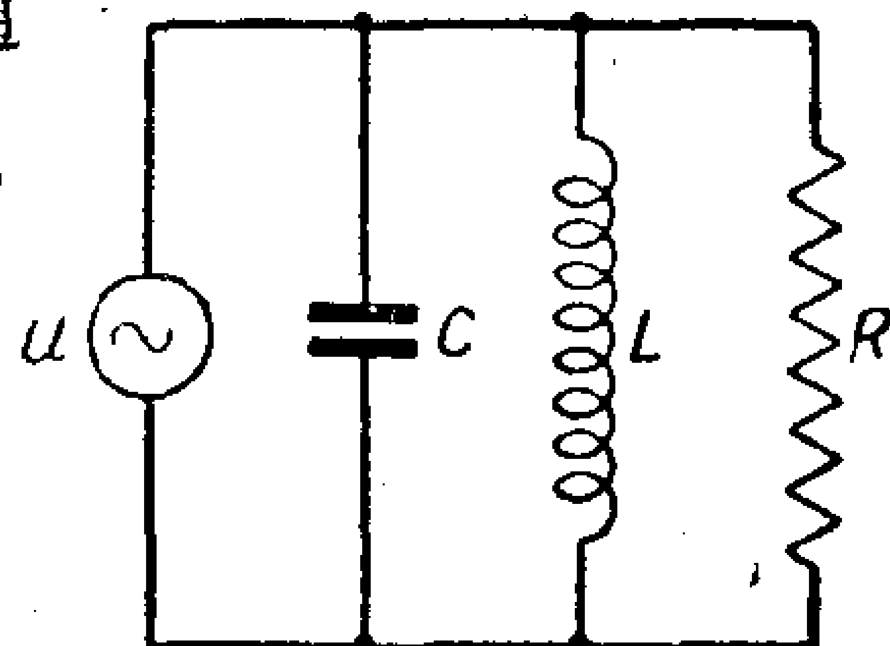


图 26.

将上式逐項微分即得：

$$C\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}u=\frac{di}{dt}.$$

这里，我們得到了另一个模拟系統，在这个系統中，与坐标 q 相对应的是电压 u，力学系数 a, b, c 被 $C, \frac{1}{R}, \frac{1}{L}$ 所代替；而广义力 $Q(t)$ 則相当于量 $\frac{di}{dt}$。

具有同一方程(准确到符号)的二个电学系統乃是同一个机械系統的二个不同的电学模型。

一自由度机械系統的动能、瑞利函数、势能和广义力

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2,\quad \widetilde{R}=\frac{1}{2}b\dot{q}^2,\quad \Pi=\frac{1}{2}cq^2,\quad Q=Q(t)$$

在第一个模拟系統中对应的是

$$T=\frac{1}{2}L\dot{q}^2,\quad \widetilde{R}=\frac{1}{2}R\dot{q}^2,\quad \Pi=\frac{1}{2C}q^2,\quad e=e(t),$$

而在第二个模拟系統中則是

$$T=\frac{1}{2}C\dot{u}^2,\quad \widetilde{R}=\frac{1}{2R}\dot{u}^2,\quad \Pi=\frac{1}{2L}u^2,\quad \frac{di}{dt}.$$

因此，机电模拟系統可由下表确定:

机械系統: q	a	b	c	Q	$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$	$\widetilde{R}=\frac{1}{2}b\dot{q}^2$	$\Pi=\frac{1}{2}cq^2$
第一模拟系統: q	L	R	$\frac{1}{C}$	e	$\frac{1}{2}L\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}R\dot{q}^2$	$\frac{1}{2C}q^2$
第二模拟系統: u	C	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{di}{dt}$	$\frac{1}{2}C\dot{u}^2$	$\frac{1}{2R}\dot{u}^2$	$\frac{1}{2L}u^2$

作为一个比較复杂的例子，我們来看图 27 上所画的这个电路。

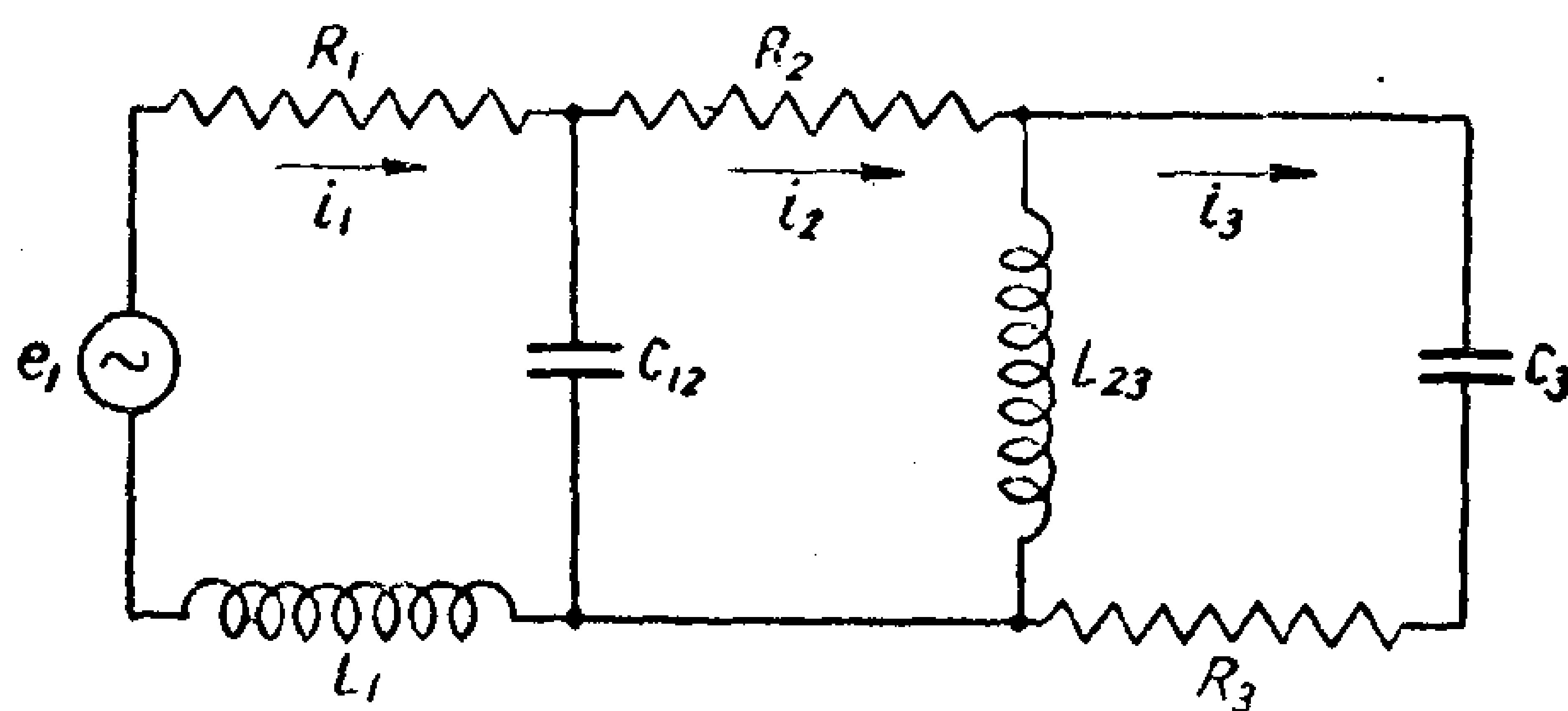


图 27.

我們按第一个模拟系統写拉格朗日方程;先来計算如下的量:

$$T=\frac{1}{2}L_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}L_{23}(\dot{q}_2-\dot{q}_3)^2,$$

$$\widetilde{R}=\frac{1}{2}R_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}R_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}R_3\dot{q}_3^2,$$

$$\Pi=\frac{1}{2C_3}q_3^2+\frac{1}{2C_{12}}(q_1-q_2)^2.$$

此外，$e_2=e_3=0$。我們还假定

$$e_1=A\sin\Omega t.$$

于是，得拉格朗日方程如下:

$$L_1\ddot{q}_1+R_1\dot{q}+\frac{1}{C_{12}}q_1-\frac{1}{C_{12}}q_2=A\sin\Omega t,$$

$$L_{23}\ddot{q}_2-L_{23}\ddot{q}_3+R_2\dot{q}_2+\frac{1}{C_{12}}q_2-\frac{1}{C_{12}}q_1=0,$$

$$L_{23}\ddot{q}_3-L_{23}\ddot{q}_2+R_3\dot{q}_3+\frac{1}{C_3}q_3=0.$$

这些方程正是图 27 上的电路的方程。

§ 10. 非完整系統的阿沛尔方程·伪坐标

在本节中我們将导出确定非完整系統运动的阿沛尔方程。假設在非完整系統上加有 d 个有限約束和 g 个微分約束(見 § 1)。我們先利用 d 个有限約束将系統各点的矢徑以 $m(=3N-d)$ 个独立坐标 $q_1, \cdots, q_m$ 和时間 t 表示出来:

$$\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{r}_\nu(t, q_1, \cdots, q_m) \quad (\nu=1, \cdots, N). \tag{1}$$

由此即得:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \quad (\nu=1, \cdots, N), \tag{2}$$

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i \quad (\nu=1, \cdots, N). \tag{2'}$$

但是,$\boldsymbol{r}_\nu$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ $(\nu=1, \cdots, N)$还要满足微分約束[①]:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{l}_{\beta\nu}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu+D_\beta=0 \quad (\beta=1, \cdots, g), \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{l}_{\beta\nu}$ 和 D_β 都是 t 和 $\boldsymbol{r}_\nu(\nu=1, \cdots, N)$的函数。

将 $\boldsymbol{r}_\nu$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 的表达式(1)和(2)代入約束方程(3),并将这些方程写成如下的形式:

---

① 将函数(1)代入有限約束方程,則有限約束方程变为恒等式。因此,在引入了表达式(1)之后,就应当仅只考虑微分約束。

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot{q}_i + A_\beta = 0 \quad (\beta=1, \cdots, g), \tag{4}$$

式中 $\dot{q}_i$ 的系数 $A_{\beta i}$ 和自由項 A_β 都是 t 和 $q_1, \cdots, q_m$ 的函数。

因此，对非完整系統，坐标 $q_1, \cdots, q_m$ 可以取任何值。但是，广义速度 $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_m$ 在此却不能任意。它們之間以关系式(4)相互約制。現在假設形如(4)式的 g 个約束是独立的，于是，可由方程(4)将广义速度中的某 g 个，例如 $\dot{q}_{n+1}, \cdots, \dot{q}_m$ 通过其余的 $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$ ($n=m-g=3N-d-g$ 是系統的自由度；見第8頁)来表示。对于速度 $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$，可以給任何値，而且一經給定，其余速度也随之被决定。

但是，按照更为一般的方法，我們不取 n (n 是自由度)个广义速度作独立量，而是取这些速度的某 n 个独立綫性組合①：

$$\dot{\pi}_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si}\dot{q}_i \quad (s=1, \cdots, n) \tag{5}$$

作为独立量，其中 f_{si} 是 t 和 $q_1, \cdots, q_m$ 的函数。

对于綫性型(5)，只需要加上一个条件：这 n 个綫性型和 g 个綫性型

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot{q}_i \quad (\beta=1, \cdots, g)$$

应构成一个具有 $m(=n+g)$ 个綫性无关型的完全組，即这 m 个綫性型的系数行列式应异于零。如此，則量 $\dot{\pi}_s (s=1, \cdots, n)$ 便可以取任何值，因为对于这些量的任何值，我們都可以由綫性方程組(4)和(5)解出与之对应的 $\dot{q}_i (i=1, \cdots, m)$ 来，而且

$$\dot{q}_i = \sum_{s=1}^{n} h_{is}\dot{\pi}_s + h_i \quad (i=1, \cdots, m), \tag{6}$$

① 为方便計，我們将綫性組合(5)記作 $\dot{\pi}_s$，虽然符号 π_s 本身可能沒有意义，因为等式(5)的右端可能不是全导数。

其中 h_{is} 和 h_i 都是 t 和 $q_1, \cdots, q_m$ 的函数。

我們把作为广义速度綫性型的量 $\dot{\pi}_s$ 称之为伪速度，而把符号 π_s 則称之为伪坐标$(s=1, \cdots, n)$。特别是 $\dot{\pi}_s$ 可以就是某些广义速度。在一般情形，$m+n$ 个量 $\dot{\pi}_s$ 和 $\dot{q}_i$ 則以关系式(5)和(6)相互关联。

为了得到微分約束加在虛位移 δq_i 上的限制，应当在方程(4)中去掉自由項 A_β 并将 $\dot{q}_i$ 代之以 $\delta q_i (i=1, \cdots, m)$（見 § 2）。如此，我們便得到:

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i} \delta q_i = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g). \tag{4'}$$

按照等式(5)引入如下符号[①]:

$$\delta \pi_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si} \delta q_i \quad (s = 1, \cdots, n). \tag{5'}$$

如前所述，型(4′)和(5′)是綫性无关的。因此，$\delta \pi_s$ 可以取任何値，而对应的 δq_i 則可由方程組(4′)和(5′)来确定:

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^{n} h_{is} \delta \pi_s \quad (i = 1, \cdots, m). \tag{6'}$$

力在虛位移上的元功表达式可以写成如下形式:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i \delta q_i, \tag{7}$$

一如完整系統那样，式中

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, \cdots, m).$$

現在将 δq_i 的表达式(6′)代入等式(7)，便得到

---

① 在平稳系統情况下，$\delta q_i = dq_i = \dot{q}_i dt$，因之，根据公式(5)和(5′)当有 $\delta \pi_s = \dot{\pi}_s dt$。

$$\delta A=\sum_{i=1}^{m}Q_i\sum_{s=1}^{n}h_{is}\delta\pi_s=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}h_{is}Q_i\right)\delta\pi_s,$$

即

$$\delta A=\sum_{s=1}^{n}\Pi_s\delta\pi_s, \tag{8}$$

其中

$$\Pi_s=\sum_{i=1}^{m}h_{is}Q_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{N}h_{is}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\boldsymbol{F}_\nu\ \ (s=1,\cdots,n). \tag{9}$$

我們将 Π_s 叫作对应于伪坐标 π_s 的广义力$(s=1,\cdots,n)$。

另一方面，将 $\dot{q}_i$ 的表达式(6)代入等式(2)，則得：

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu=\sum_{s=1}^{n}\boldsymbol{e}_{\nu s}\dot{\pi}_s+\boldsymbol{e}_\nu\ \ (\nu=1,\cdots,N), \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{e}_{\nu s}$ 和 $\boldsymbol{e}_\nu$ $(\nu=1,\cdots,N;\ s=1,\cdots,n)$ 都是 t 和 $q_1,\cdots,q_m$ 的矢量函数。

由等式(10)即可得到[①]：

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu=\sum_{s=1}^{n}\boldsymbol{e}_{\nu s}\delta\pi_s\ \ (\nu=1,\cdots,N) \tag{11}$$

和

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu=\sum_{s=1}^{n}\boldsymbol{e}_{\nu s}\ddot{\pi}_s+\cdots\ \ (\nu=1,\cdots,N); \tag{12}$$

这里，公式(12)的右端只写出了包含伪加速度 $\ddot{\pi}_s(s=1,\cdots,n)$ 的各項。

利用等式(8)和(11)将动力学普遍方程

---

① 量 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$, $\dot{\pi}_s$ 和 $\dot{q}_i$ 以关系式(2),(4)和(5)相互联系着。由这些关系式中消去 $\dot{q}_i$ 便得到公式(10)。但由于量 $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, $\delta\pi_s$ 和 δq_i 所满足的齐次关系式(2′),(4′)，和(5′)与关系式(2),(4)和(5)的差别仅仅是沒有自由項，所以，作为由关系式(2′),(4′)和(5′)消去 δq_i 而得到的結果，公式(11)可以由公式(10)将 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 代之以 $\delta\boldsymbol{r}_\nu$，将 $\dot{\pi}_s$ 代之以 $\delta\pi_s$，并去掉自由項 $\boldsymbol{e}_\nu$ 而得到。

$$\delta A-\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu=0 \tag{13}$$

写成如下形式:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\Pi_s-\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu\boldsymbol{e}_{\nu s}\right)\delta\pi_s=0. \tag{14}$$

因为 $\delta\pi_s$ 是完全任意的,所以由此得到:

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu\boldsymbol{e}_{\nu s}=\Pi_s\ \ (s=1,\cdots,n). \tag{15}$$

現在引入"加速度能":

$$U=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu^2=U(t,q_i,\dot{\pi}_s,\ddot{\pi}_s). \tag{16}$$

注意到根据公式(12)

$$\boldsymbol{e}_{\nu s}=\frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial\ddot{\pi}_s}\ \ (\nu=1,\cdots,N;s=1,\cdots,n), \tag{17}$$

我們便可以将方程(15)写成如下形式:

$$\frac{\partial U}{\partial\ddot{\pi}_s}=\Pi_s\ \ (s=1,\cdots,n). \tag{18}$$

方程(18)曾首次由阿沛尔得到,称之为阿沛尔方程。这 $n(=3N-d-g)$ 个微分方程和 g 个約束方程

$$\sum_{i=1}^{m}A_{\beta i}\dot{q}_i+A_\beta=0\ \ (\beta=1,\cdots,g) \tag{19}$$

以及 n 个微分关系式

$$\dot{\pi}_s=\sum_{i=1}^{m}f_{si}\dot{q}_i \tag{20}$$

一起构成一个确定非完整系統运动的微分方程組。

現在将阿沛尔方程写成展开形式。为此,将 $\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 的表达式(12)代入公式(15)。于是,得到:

$$\sum_{s=1}^{n} u_{\rho s}\ddot{\pi}_s + (**) = \Pi_\rho \quad (\rho = 1, \cdots, n), \tag{21}$$

式中

$$\Pi_\rho = \Pi_\rho(t, q_i, \dot{\pi}_s), \quad u_{\rho s} = u_{\rho s}(t, q_i) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{e}_{\nu s} \boldsymbol{e}_{\nu \rho} \tag{22}$$

$$(\rho, s = 1, \cdots, n).$$

方程(21)中的(**)表示那些不包含伪加速度 $\ddot{\pi}_s (s=1, \cdots, n)$ 的諸項。

可以证明 $u_{\rho s}$ 的系数行列式不恒等于零:

$$\det(u_{\rho s})_{\rho, s=1}^{n} \neq 0^{①}. \tag{23}$$

因此,可以就方程(21)解出伪加速度:

$$\ddot{\pi}_s = H_s(t, q_i, \dot{\pi}_\rho) \quad (s = 1, \cdots, n). \tag{24}$$

另一方面,关系式(19)和(20)也可以写成就 $\dot{q}_i (i=1, \cdots, m)$ 解出的形式[見公式(6)]。

因此,非完整系統的运动由未知函数 $q_1, \cdots, q_m, \dot{\pi}_1, \cdots, \dot{\pi}_n$ 的一組 $n+m$ 个一阶微分方程所决定,而且这些方程可就其导数解出。因之,初始数据 $q_1^0, \cdots, q_m^0, \dot{\pi}_1^0, \cdots, \dot{\pi}_n^0$ 唯一地决定了系統的运动。而系統任何为約束所容許的初始位置和初始速度也都可以按公式(1)和(6)借助于这些初始数据来給出。因此,給非完整系統一与有限約束和微分約束不矛盾的初始位置和初始速度,就唯一地决定了这个系統的运动。

注 1. 在特殊情况下,如果取 n 个独立的广义速度,例如 $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$ 作伪速度,則为了决定对应的广义力 $Q_1^*, \cdots, Q_n^*$ 就应当将等式(7)中的 $\delta q_{n+1}, \cdots, \delta q_m$ 用 $\delta q_1, \cdots, \delta q_n$ 来表示:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i \delta q_i = \sum_{s=1}^{n} Q_s^* \delta q_s. \tag{25}$$

① 在个别点上这个行列式可能等于零。在討論中我們不考虑这些奇异点。不等式(23)的证明和第 39—40 頁上关于不等式 $\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n} \neq 0$ 的证明相似。

在这种情况下，加速度能 U 就可以写成函数 $B(t, q_1, \cdots, q_m, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \cdots, \ddot{q}_n)$ 的形式，而阿沛尔方程取如下形式：

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s^* \quad (s=1, \cdots, n). \tag{26}$$

注 2. 特别是阿沛尔方程也可以用于完整系統。此时，所有的速度 $\dot{q}_i$ 都是独立的，而且 $Q_i = Q_i^* (i=1, \cdots, n)$；而方程(26)是第二类拉格朗日方程的另一种写法①。

例題 1. 我們用阿沛尔方程来求 § 3 例題（見第 16 頁）所描述的运动。这个例子将使讀者可以就求解非完整系統运动的二种方法——拉格朗日乘子法和阿沛尔方程——进行比較，并从中見出第二种方法的优越性。取杆子的中点坐标 x，y 和 M_1M_2 与水平軸 x 間的夹角 φ 作独立坐标（見图 28），則

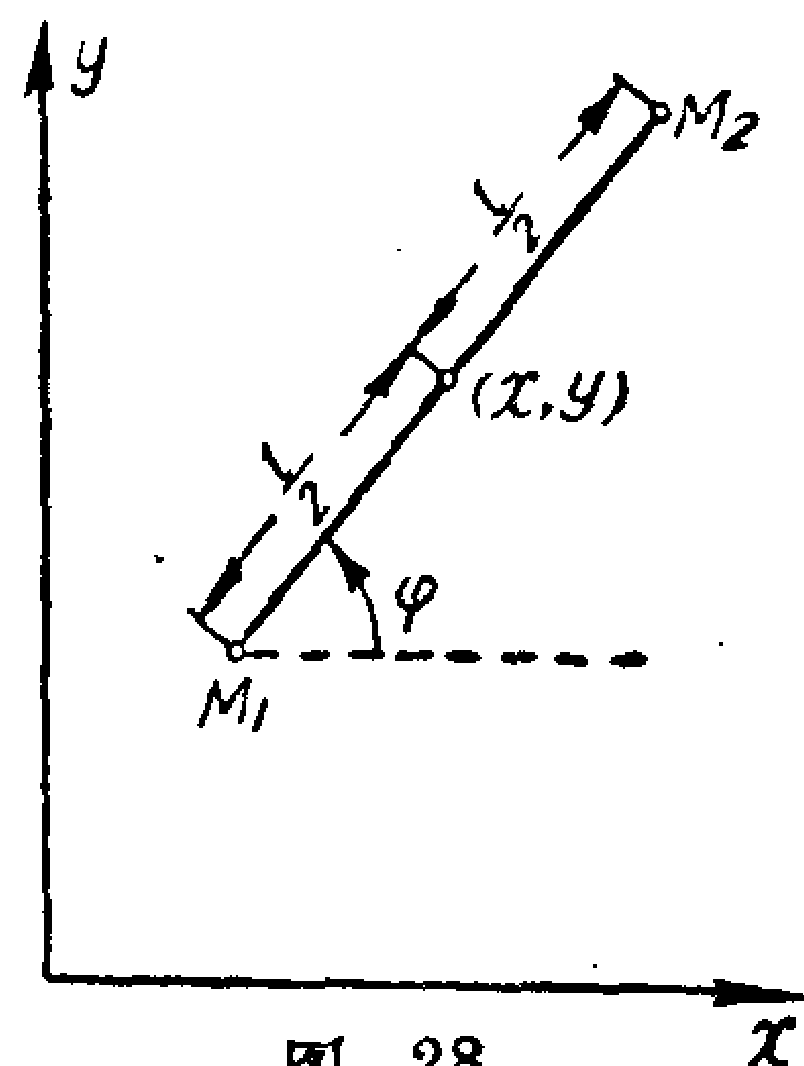


图 28.

$$x_1 = x - \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad x_2 = x + \frac{l}{2}\cos\varphi,$$

$$y_1 = y - \frac{l}{2}\sin\varphi, \quad y_2 = y + \frac{l}{2}\sin\varphi.$$

在新坐标中微分約束的方程取如下形式：

$$\frac{\dot{x}}{\cos\varphi} = \frac{\dot{y}}{\sin\varphi}.$$

不难看出，加速度能 U 可以按如下形式表示：

$$U = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{y}_2^2) = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \frac{1}{4} l^2 (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)。$$

引入伪速度 $\dot{\pi}$，令

$$\dot{x} = \dot{\pi}\cos\varphi, \quad \dot{y} = \dot{\pi}\sin\varphi.$$

則得

$$U = \ddot{\pi}^2 + \frac{1}{4} l^2 \ddot{\varphi}^2 + \cdots,$$

式中未予写出的各項都不包含加速度。現在来决定广义力。由元功表达式

$$\delta A = \Pi\delta\pi + \Phi\delta\varphi = -2g\delta y = -2g\sin\varphi\,\delta\pi,$$

便得到

① 但是，将伪坐标形式的阿沛尔方程用于完整系統时就会給出运动方程的另一型式。

$$\Pi=-2g\sin\varphi,\ \Phi=0.$$

阿沛尔方程为：

$$\frac{\partial U}{\partial\ddot{\pi}}=\Pi,\quad \frac{\partial U}{\partial\ddot{\varphi}}=\Phi.$$

在所給情况下，这些方程都不包含坐标 x, y，而且具有如下的形式：

$$\ddot{\pi}=-g\sin\varphi,\ \ddot{\varphi}=0.$$

将上式积分之，便得到：

$$\varphi=\alpha t+\beta,$$

$$\frac{d\dot{\pi}}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\ddot{\pi}=-\frac{g}{\alpha}\sin\varphi,\ \dot{\pi}=\frac{g}{\alpha}\cos\varphi+\gamma.$$

現在来求 x 和 y：

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{x}=\frac{1}{\alpha}\dot{\pi}\cos\varphi=\frac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi+\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{y}=\frac{1}{\alpha}\dot{\pi}\sin\varphi=\frac{g}{\alpha^2}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi.$$

由此得到

$$x=\frac{g}{2\alpha^2}\varphi+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\sin\varphi+\delta,$$

$$y=-\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\cos\varphi+\varepsilon.$$

将 φ 代之以 $\alpha t+\beta$，便得到有限形式的运动方程，它包含五个任意常数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 和 ε：

$$x=\frac{g}{2\alpha^2}(\alpha t+\beta)+\left[\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos(\alpha t+\beta)\right]\sin(\alpha t+\beta)+\delta,$$

$$y=-\left[\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos(\alpha t+\beta)\right]\cos(\alpha t+\beta)+\varepsilon,\ \varphi=\alpha t+\beta.$$

2. 我們来看怎样由阿沛尔方程得到有固定点 O 的剛体的欧拉动力学方程。

令 p, q, r 分别表示角速度 ω 在慣性主軸 $O\xi, O\eta, O\zeta$ 上的投影。如所周知，这些投影是广义速度 $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ 的綫性組合，其中 ψ, θ, φ 是欧拉角（見第28—29頁）①。因此，可以取 p, q, r 作为三个伪速度。現在来計算加速度能②：

① 将矢量等式 $\omega=\omega_\psi+\omega_\theta+\omega_\varphi$ 在坐标軸上逐項投影即得 p, q, r 的表达式，其中 $\omega_\psi=\dot{\psi}$, $\omega_\theta=\dot{\theta}$, $\omega_\varphi=\dot{\varphi}$.

② 这里我們利用了著名的恒等式：

$$r\times(\omega\times v)+\omega\times(v\times r)+v\times(r\times\omega)=0;$$

其左端最后一項是等于零的，因为 $v=\omega\times r$。公式(27)中未写出的諸項均不包含角加速度 ε。

$$
\begin{aligned}
2U &= \int w^2 dm = \int (\varepsilon \times \boldsymbol{r} + \omega \times \boldsymbol{v})^2 dm = \\
&= \int (\varepsilon \times \boldsymbol{r})^2 dm + 2\int (\varepsilon \times \boldsymbol{r})(\omega \times \boldsymbol{v}) dm + \cdots = \\
&= \int (\varepsilon \times \boldsymbol{r})^2 dm + 2\varepsilon \int [\boldsymbol{r} \times (\omega \times \boldsymbol{v})] dm + \cdots = \\
&= \int (\varepsilon \times \boldsymbol{r})^2 dm + 2\varepsilon \left[\omega \times \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} dm \right] + \cdots
\end{aligned} \tag{27}
$$

我們注意，$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta\omega}{dt} + \omega \times \omega = \frac{\delta\omega}{dt}$。这里$\frac{d}{dt}$和$\frac{\delta}{dt}$分别表示在固定坐标軸和固联于物体的坐标軸中取微分①。因此，$\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ 是角加速度 ε 在軸 $O\xi, O\eta, O\zeta$ 上的投影。

于是，仿照动能的表达式②

$$2T = \int (\omega \times \boldsymbol{r})^2 dm = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

(A, B, C 是对慣性主軸 $O\xi, O\eta, O\zeta$ 的轉动慣量)便可以得到：

$$\int (\varepsilon \times \boldsymbol{r})^2 dm = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2.$$

另一方面，动量矩 $\boldsymbol{G} = \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} dm$ 的分量为 Ap, Bq, Cr。因之，最后我們便得到 $2U$ 的表达式如下：

$$2U = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 + 2[(C-B)qr\dot{p} + (A-C)rp\dot{q} + (B-A)pq\dot{r}] + \cdots。$$

另外，对于外力的元功，我們有

$$\delta A = \boldsymbol{L}_O \omega dt = L_\xi p dt + L_\eta q dt + L_\zeta r dt.$$

于是，由阿沛尔方程直接得欧拉方程如下：

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = L_\xi,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = L_\eta,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = L_\zeta.$$

---

① 参考，例如，Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Курс теоретической механики, 1954, 第一卷, §73。(有中譯本)

② 参考Суслов Г. К., Теоретическая механика, М.-Л., 1944, §259。

第二章　势場中的运动方程

§11. 有势力情况下的拉格朗日方程·广义势·非自然系統

假設广义力Q_i是有势的，即假設存在力的势(势能)$\Pi=\Pi(t, q_i)$(見§8)，而且

$$Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1,\cdots,n). \tag{1}$$

于是，拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1,\cdots,n)$$

可以写成如下的形式①:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,\cdots,n), \tag{2}$$

其中

$$L=T-\Pi. \tag{3}$$

函数L称为拉格朗日函数或动势。

动势L和动能T一样，也是广义速度的二次函数:

$$L=L_2+L_1+L_0, \tag{4}$$

其中

$$L_2=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k,\quad L_1=\sum_{i=1}^{n}c_i\dot{q}_i,\quad L_0=c_0. \tag{4'}$$

这里的系数c_{ik}, c_i, c_0都是坐标$q_1,\cdots, q_n$和时間t的函数($i, k=$

---

① 因为势能Π不依賴于广义速度，而$L=T-\Pi$，所以，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},\quad \frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}(i=1,\cdots,n).$$

$=1,\cdots,n$)。将公式(3)和第 38 頁上的公式(5)加以比較便得到:

$$L_2=T_2,\quad L_1=T_1,\quad L_0=T_0-\Pi. \tag{5}$$

注意: 当作用在质点上的主动力 $\boldsymbol{F}_\nu=X_\nu\boldsymbol{i}+Y_\nu\boldsymbol{j}+Z_\nu\boldsymbol{k}(\nu=1,\cdots,N)$ 在笛卡尔坐标 $x_\nu, y_\nu, z_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 中有势 $\Pi(t,x_\nu,y_\nu,z_\nu)$ 时, 即

$$X_\nu=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_\nu},\ Y_\nu=-\frac{\partial\Pi}{\partial y_\nu},\ Z_\nu=-\frac{\partial\Pi}{\partial z_\nu}\qquad(\nu=1,\cdots,N),$$

这些力在独立坐标 $q_i(i=1,\cdots,n)$ 中也有势 (相反的結論在一般情况下并不成立!), 而且仍是同一个势 Π, 只不过是以坐标 $q_1,\cdots,q_n$ 和时間 t 表示罢了。事实上,

$$\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i=\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu\delta x_\nu+Y_\nu\delta y_\nu+Z_\nu\delta z_\nu)=-\delta\Pi=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\delta q_i,$$

由此立即可得等式(1)。

我們現在抛开通常的势 $\Pi(t,q_i)$ 来討論存在广义势 $V(t,q_k,\dot q_k)$ 的情形。这时广义力 Q_i 可借如下的公式通过它来表示:

$$Q_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}\qquad(i=1,\cdots,n). \tag{6}$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}\qquad(i=1,\cdots,n)$$

仍然可以写成如(2)的形式, 只要令

$$L=T-V. \tag{7}$$

由公式(6)得:

$$Q_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2V}{\partial\dot q_i\partial\dot q_k}\ddot q_k+(**)\qquad(i=1,\cdots,n), \tag{8}$$

其中(**)表示那些不包含广义加速度 $\ddot q_k(k=1,\cdots,n)$ 的各項之和。

由于我們在力学中仅討論广义力 Q_i 不显含广义加速度而只与时間、坐标和广义速度有关的那种情况, 即

$$Q_i=Q_i(t,q_k,\dot q_k)\qquad(i=1,\cdots,n), \tag{9}$$

所以, 按公式(8), 此时 V 对广义速度的二阶偏导数全都应当恒等

于零，即广义势 V 綫性地依賴于广义速度：

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Pi_i\dot{q}_i+\Pi=V_1+\Pi, \tag{10}$$

其中 $\Pi_i(i=1,\cdots,n)$ 和 Π 都是坐标 $q_1,\cdots,q_n$ 和时間 t 的函数。因而，由等式(7)，L 仍然是速度 $\dot{q}_i$ 的二次函数，而且，代替等式(5)有[①]：

$$L_2=T_2,\quad L_1=T_1-V_1,\quad L_0=T_0-\Pi. \tag{11}$$

将 V 的表达式(10)代入公式(6)，我們便得到：

$$Q_i=\frac{d\Pi_i}{dt}-\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{k=1}^{n}\Pi_k\dot{q}_k+\Pi\right]=$$

$$=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\Pi_i}{\partial q_k}-\frac{\partial\Pi_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k+\frac{\partial\Pi_i}{\partial t}. \tag{12}$$

公式(12)表明，当广义势的綫性部分 V_1 不显含时間 t 时 $\left[\frac{\partial\Pi_i}{\partial t}=0(i=1,\cdots,n)\right]$，广义力 Q_i 由有势力 $-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}(i=1,\cdots,n)$ 和迴轉仪力

$$\tilde{Q}_i=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}\dot{q}_k\qquad(i=1,\cdots,n) \tag{13}$$

之和組成，其中

$$\gamma_{ik}=-\gamma_{ki}=\frac{\partial\Pi_i}{\partial q_k}-\frac{\partial\Pi_k}{\partial q_i}\qquad(i,k=1,\cdots,n). \tag{13'}$$

由如下的例子可以見出討論广义势的重要性。

例題. 电磁場中的点电荷上作用有劳倫兹力

---

① 在 L 和 T 的表达式中，它們的系数是相互有关的。事实上，在普通势的情形 $c_i=a_i$，而在广义势的情形下，則有 $c_i=a_i-\Pi_i(i=1,\cdots,n)$。在兩种情况下，都有 $c_{ik}=a_{ik}(i,k=1,\cdots,n)$，$c_0=a_0-\Pi$ 以及 $L_2=T_2$——正定二次型。

$$F=e\left[E+\frac{v}{c}\times H\right],\tag{14}$$

其中 v 是点电荷的速度，e 是荷电量，c 是光速，而 E 和 H 是电場和磁場的强度。矢量 E 和 H 可以分别通过标量势 φ 和矢量 A 用如下公式来表示①

$$E=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t},\quad H=\operatorname{rot}A.\tag{15}$$

我們来找劳倫兹力 F 的广义势。

由公式(14)和(15)得②：

$$\begin{aligned}F&=-e\operatorname{grad}\varphi-\frac{e}{c}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{e}{c}(v\times\operatorname{rot}A)=\\&=-e\operatorname{grad}\varphi-\frac{e}{c}\frac{dA}{dt}+\frac{e}{c}[(v\nabla)A+v\times\operatorname{rot}A]=\\&=-e\operatorname{grad}\varphi-\frac{e}{c}\frac{dA}{dt}+\frac{e}{c}\operatorname{grad}(vA),\end{aligned}\tag{16}$$

这里，$\operatorname{grad}(vA)$ 中的速度 v 被看作与場中各点无关的矢量。

因此取点的笛卡尔坐标 x, y, z 作独立坐标，并假定

$$V=e\varphi-\frac{e}{c}(vA),\tag{17}$$

即

$$V=e\varphi-\frac{e}{c}(\dot{x}A_x+\dot{y}A_y+\dot{z}A_z),$$

則得

① 例如見 Ландау Л. Д. 和 Лифшиц Е. М. 著 Теория поля, М.—Л., 1948, 第 55 頁(有中譯本)。

② 对于表达式 $(v\nabla)A=v_x\frac{\partial A}{\partial x}+v_y\frac{\partial A}{\partial y}+v_z\frac{\partial A}{\partial z}$，我們在这里利用了著名的矢量分析公式

$$(v\nabla)A+v\times\operatorname{rot}A=\operatorname{grad}(vA),$$

其中 v 被看作常矢量。比較上式两端在 x, y, z 軸上的投影便不难看出这个公式的正确性。事实上，对于 x 軸有

$$\begin{aligned}&v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}+v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\\&\quad-v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)=v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(vA).\end{aligned}$$

在 y 軸和 z 軸上投影可以得到类似的公式。

$$F_x = -\frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

对于 F_y 和 F_z 也有相似的公式。因此，劳倫兹力(14)的广义势由公式(17)确定，而拉格朗日函数 L 则有如下的表达式：

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}). \tag{18}$$

力在其中具有通常势 $\Pi(t, q_i)$ 或广义势 $V(t, q_i, \dot{q}_i)$ 的古典系統統称之为自然系統。对于这样的系統，拉格朗日函数 L 是广义速度的二次函数，即可以写成表达式(4)的形式，其中 L_2 是广义速度的正定二次型。

在力場不存在的情况下，相对論意义下的质点运动可以作为非自然系統的一个例子。此时，质点的运动决定于动势为

$$L = -mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

的拉格朗日方程（c 是光速）。这里 L 已經不是速度 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 的二次函数了。

如果将 L 函数表达式中的 $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ 按 $\frac{v^2}{c^2}$ 之冪展成級数，并略去 $\frac{v^2}{c^2}$ 的二次以上的項，即，使 $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$，我們便得到关于孤立质点的拉格朗日函数的"古典表达式"：

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \text{const}.$$

在本章和以下各章我們将就一般形式的系統① 进行討論。这种一般形式的系統，其运动是由 $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$ 为任意函数的拉格朗日方程决定的。在此将仅假定函数 L 关于广义速度的海斯式不恒等于零②：

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{19}$$

---

① 那些仅对自然系統才正确的論断我們将特别予以指出。

② 对于自然系統，$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = a_{ik}(i, k = 1, \cdots, n)$，按 §7（第 39—40 頁）所证，它是滿足不等式(19)的。

方程(2)的展开形式可以写成

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k+(**)=0, \tag{20}$$

式中(**)表示那些不包含广义加速度 $\ddot{q}_i(i=1,\cdots,n)$的各項之和。由于(关于 $\ddot{q}_k$ 的)綫性方程組(20)的系数行列式不为零[見不等式(19)],所以方程組(20)可以就广义加速度解出,并写成

$$\ddot{q}_i=G_i(t,q_k,\dot{q}_k) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

的形式。因此,§7 中关于初始数据 q_i^0, $\dot{q}_i^0\ (i=1,\cdots,n)$唯一地确定系統运动的結論不仅对于自然系統正确,而且对于在这里所討論的、形式更为一般的系統也是正确的。

§ 12. 哈密頓正則方程

拉格朗日已向我們指出当已知动势(拉格朗日函数)$L=L(t,q_i,\dot{q}_i)$时如何写出系統的运动微分方程。

我們把表示拉格朗日函数的变量 $t,q_i,\dot{q}_i(i=1,\cdots,n)$称之为拉格朗日变量。这些变量的一組值就表示出系統在一定时刻的状态,即系統的位置及其各点的速度。如象上节末所指出的那样,給定拉格朗日函数和初始状态就唯一地决定了系統的运动。

哈密頓曾經提出以量 $t,q_i,p_i(i=1,\cdots,n)$作为描述系統状态的基本变量,这里 $p_i(i=1,\cdots,n)$是广义冲量,由下式决定:

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} \qquad (i=1,\cdots,n). \tag{1}$$

变量 $t,q_i,p_i(i=1,\cdots,n)$称为哈密頓变量。

因为等式(1)右端关于变量 $\dot{q}_i$ 的雅科毕行列式正好就是函数 L 的异于零的海斯式[見第 64 頁上的条件(19)],所以方程(1)可以就 $\dot{q}_i(i=1,\cdots,n)$解出:

$$\dot{q}_i=\Phi_i(t,q_k,p_k) \qquad (i=1,\cdots,n). \tag{2}$$

因此，哈密頓变量可以通过拉格朗日变量表出，拉格朗日变量也可以通过哈密頓变量表出，而且，系統的状态既可以用拉格朗日变量的一組値来表示，也可以用哈密頓变量的一組値来表示。

在自然系統的情形下，L 是广义速度的二次函数(見第60—62頁)，因之，按等式(1)，广义冲量可以通过广义速度綫性地表出：

$$p_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_k+c_i \qquad (i=1,\cdots,n). \tag{3}$$

解这个关于 $\dot{q}_i$ 的綫性方程組①，則对于 $\dot{q}_i$ 仍然得到綫性表达式：

$$\dot{q}_i=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}p_k+b_i \qquad (i=1,\cdots,n), \tag{4}$$

式中 b_{ik} 和 b_i 都是 $t, q_1, \cdots, q_n$ 的函数。

如果在自然系統中力 $Q_i(i=1,\cdots,n)$ 具有通常势 $\Pi(t,q_i)$，則由等式 $L=T-\Pi$ 得②

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \tag{5}$$

我們注意，对于拉格朗日变量的任何函数

$$F=F(t,q_i,\dot{q}_i),$$

当以广义速度 $\dot{q}_i$ 的表达式(2)或(4)代入其中时，它将变为哈密頓变量的某一函数 $\widehat{F}(t,q_i,p_i)$。我們将函数 $\widehat{F}(t,\ q_i,\ p_i)$ 叫作函数 $F(t,q_i,\ \dot{q}_i)$ 的关联表达式。

例題 对于自由质点，笛卡尔坐标 x,y,z 是独立的，在势場 $\Pi=\Pi(t,x,y,z)$ 中拉格朗日函数具有如下形式：

---

① 一如§7所证，$\det(a_{ik})_{i,k=1}^{n}\neq 0$.

② 当力具有广义势时，公式(5)不成立。在这情况下[見第61—62頁上的等式(7)和(10)]

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\Pi_i \quad (i=1,\cdots,n).$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\Pi(t,x,y,z).$$

和笛卡尔坐标相对应的冲量

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x},\quad p_y=m\dot{y},\quad p_z=m\dot{z}. \tag{6}$$

如果由此解出 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 并将所得表达式代入 L，我們便得到 L 的关联表达式:

$$\widehat{L}=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-\Pi(t,x,y,z). \tag{7}$$

如果有广义势

$$V=\Pi_1\dot{x}+\Pi_2\dot{y}+\Pi_3\dot{z}+\Pi,$$

代替 $\Pi(t,x,y,z)$式中 Π_1, Π_2, Π_3, Π 都是 t,x,y,z 的函数，則由等式

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\Pi_1\dot{x}-\Pi_2\dot{y}-\Pi_3\dot{z}-\Pi$$

便有:

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}-\Pi_1,\quad p_y=m\dot{y}-\Pi_2,\quad p_z=m\dot{z}-\Pi_3, \tag{6'}$$

而关联表达式 $\widehat{L}$ 有如下形式:

$$\widehat{L}=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-\frac{1}{2m}(\Pi_1^2+\Pi_2^2+\Pi_3^2)-\Pi. \tag{7'}$$

哈密頓在討論中引入了一个由如下等式所定义的函数 $H(t, q_i, p_i)$:

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L, \tag{8}$$

或确切地写成

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_i\widehat{\dot{q}_i}-\widehat{L}, \tag{8'}$$

并指出借助于这个函数可以将运动方程写成如下形式的一組 $2n$ 个一阶常微分方程:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,\cdots,n). \tag{9}$$

这些方程称为正則方程或哈密頓方程[1]。由 (8′) 式所定义的函数

[1] 这些方程的一般形式最先由英国数学家哈密頓(Hamilton W.) 于1834 年得到。

$H(t, q_i, p_i)$称为哈密頓函数。

哈密頓正則方程可借下述数学定理导出。

唐肯定理[①]. 假設給定一函数 $X(x_1, \cdots, x_n)$，它的海斯式不等于零:

$$\det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{i,k=1}^{n} \neq 0, \tag{10}$$

又設函数 $X(x_1, \cdots, x_n)$“产生”一变量变换:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \qquad (i=1, \cdots, n), \tag{11}$$

則必有变换(11)的逆变换存在，它也是由某个函数 $Y(y_1, \cdots, y_n)$ 产生的:

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \qquad (i=1, \cdots, n), \tag{12}$$

而且逆变换的产生函数 Y 和正变换的产生函数 X 满足如下关系:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X. \tag{13}$$

若函数 X 包含参数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，即 $X = X(x_1, \cdots, x_n; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，則 Y 也包含这些参数，即 $Y = Y(y_1, \cdots, y_n; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，而且

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} \qquad (j=1, \cdots, m). \tag{14}$$

証明. 函数 X 的海斯式和方程(11)右端部分的亚可比式是完全一样的。因此，条件(10)表明，由方程(11)可以将变量 $x_1, \cdots, x_n$ 通过 $y_1, \cdots, y_n$ 表出:

$$x_i = f_i(y_1, \cdots, y_n) \qquad (i=1, \cdots, n). \tag{15}$$

假設 $Y(y_1, \cdots, y_n)$是由公式 (13) 所确定的函数，其中变量 x_i

---

① Philosoph. Trans., 1854. 在唐肯定理中所說的由变量 x_i 到变量 y_i 的变换$(i=1, \cdots, n)$通常称之为勒襄德变换。

已由其表达式(15)代替，則

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i}=\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k y_k-X\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}y_k+x_i-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}.$$

但是，根据等式(11)，上式右端的二个和相互抵消，因之，公式(12)成立。

現在假設除变量 $x_1, \cdots, x_n$ 而外，X 还包含参数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$。于是，正变换(11)必将包含这些参数，因而逆变换也必包含这些参数：

$$x_i=f_i(y_1, \cdots, y_n; \alpha_1, \cdots, \alpha_m) \qquad (i=1, \cdots, n).$$

将等式(13)所定义的函数 Y 中的 x_i 代之以 $f_i(y_1, \cdots, y_n; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，則[①]

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}=\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-X\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}y_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}-\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}=-\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}\ (j=1, \cdots, m).$$

唐肯定理证完。

我們将唐肯定理应用到由拉格朗日变量轉換为哈米頓变量的变换上。将定理中的函数 X 换成 L，变量 $x_1, \cdots, x_n$ 换成 $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$，参数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 换成 $q_1, \cdots, q_n, t$，变量 $y_1, \cdots, y_n$ 换成 $p_1, \cdots, p_n$，最后，将函数 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i-X$ 换成

$H=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L$，于是，根据唐肯定理(函数 L 关于 $\dot{q}_i(i=1, \cdots, n)$

① 在計算导数 $\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}$ 时，量 $y_1, \cdots, y_n$ 应看作常量。

的海斯式不等于零！）由公式(1)便得到：

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,\cdots,n),\tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial t}.\tag{17}$$

等式(16)和(17)都是恒等式。它們都是关于广义速度和广义冲量之間关系式(1)的推論。但根据(1)式拉格朗日方程可以写成：

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_i}\qquad (i=1,\cdots,n).\tag{18}$$

这些方程和(16)式一起就使我們得到哈密頓正則方程：

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,\cdots,n).\tag{19}$$

除哈密頓方程而外，我們还得到了恒等式(17)，它在今后将被用到。

由方程(19)可得恒等式

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}.\tag{20}$$

如果哈密頓函数 H 不显含时間 t，即如果

$$H=H(q_i,p_i),$$

則系統被称之为广义保守系統。此时，$\frac{\partial H}{\partial t}=0$①，因而，由恒等式(20)得 $\frac{dH}{dt}=0$，即在系統运动过程中

$$H(q_i,p_i)=\text{const}=h,\tag{21}$$

其中 h 是任意常数。函数 H 称为广义总能量，而关系式(21)称为广义能量积分。

① 由等式(17)可以断定，对于广义保守系統也有 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，即 t 不显含在拉格朗日函数 L 中。

为了說明这个名詞，我們来考察自然系統。在自然系統中 L 是二次函数[見 §11 等式(4)]，即

$$L=L_2+L_1+L_0,$$

而

$$H=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i-L=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L_2-L_1-L_0.$$

但根据齐次函数的欧拉定理①

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2L_2,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=L_1. \tag{22}$$

因此，对于任何自然系統最后都有

$$H=L_2-L_0. \tag{23}$$

令 $T=T_2+T_1+T_0$。如果力具有通常的势 $\Pi=\Pi(t,q_i)$ 或广义势 $V=V_1+\Pi$，則 $L_2=T_2$, $L_0=T_0-\Pi$，因而

$$H=T_2-T_0+\Pi. \tag{24}$$

如果系統是平稳的，則 $T=T_2$, $T_0=0$，因而

$$H=T+\Pi. \tag{25}$$

因此，对于平稳的自然系統，哈密頓函数 H 乃是以哈密頓变量表示的总能量②。

我們現在来看保守系統，即平稳的完整自然系統，且其作用力有不显含时間的通常势。

在这种情况下，时間 t 不显含于总能量 H 的表达式(25)中，因

① 見第 43 頁上的脚注。

② 当有广义势 $V=V_1+\Pi$ 存在时，我們仍然将量 $T+\Pi$ 称为总能量，而不是将 $T+V$ 称为总能量。

此，根据等式(21)，能量守恒定律成立：

$$T+\Pi=h. \tag{26}$$

保守系統是广义保守系統的特殊情形，而且在此特殊情形，广义能量积分化为通常的能量积分。

如果系統是平稳的，而且力具有广义势 $V=V_1+\Pi$，其中 Π 不显含时間 $t\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}=0\right)$，則函数 Π 仍然由公式(25)确定，而且不显含时間 t。因此，在这种情况下，系統是广义保守系統，而且有能量积分(26)[1]。

例題．水平軌道繞鉛直軸轉动，沿軌道有质量为 m 的重物运动。作用在重物上的力有势 $\Pi(r)$，其中 r 是重物到轉軸的距离。

以 φ 表示軌道的轉角，以 $I=md^2$ 表示軌道对鉛直轉軸的轉动慣量。取 r 和 φ 为系統的独立坐标，則

$$T=\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)=\frac{1}{2}m[\dot{r}^2+(r^2+d^2)\dot{\varphi}^2].$$

由此得：

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}, \quad p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m(r^2+d^2)\dot{\varphi}.$$

因为系統是保守的，所以

$$H=T+\Pi=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2+d^2}\right)+\Pi(r).$$

在所給情况下，正則方程有如下形式：

$$\frac{dr}{dt}=\frac{p_r}{m}, \quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{p_\varphi}{m(r^2+d^2)},$$

$$\frac{dp_r}{dt}=\frac{rp_\varphi^2}{m(r^2+d^2)^2}-\Pi'(r), \quad \frac{dp_\varphi}{dt}=0,$$

而能量积分可以写成：

$$p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2+d^2}+2m\Pi(r)=h_1 \quad (h_1=2mh).$$

---

① 見第 71 頁的脚注 2。

§ 13. 罗司方程

罗司曾以部分拉格朗日变量和部分哈密頓变量作为描述系統在时刻 t 的状态的基本变量。量

$$t, q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha \qquad (i=1, \cdots, m; \alpha=m+1, \cdots, n) \qquad (1)$$

称为罗司变量(这里 m 是小于 n 的任一固定数)。

为使拉格朗日变量化为罗司变量，应当将全体 $\dot{q}_\alpha$ 通过 $p_\alpha(\alpha=$ $=m+1, \cdots, n)$ 来表示。为此，我們利用如下的关系：

$$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha=m+1, \cdots, n). \qquad (2)$$

假設函数 L 关于广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 的海斯式("小海斯式")不等于零①：

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\right)_{\alpha, \beta=m+1}^{n} \neq 0. \qquad (3)$$

于是，应用上一节所证明的唐肯定理，我們便得到变换(2)的逆变换：

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha=m+1, \cdots, n), \qquad (4)$$

式中 $R=R(t, q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha)$ 称为罗司函数，由下式确定：

$$R=\sum_{\alpha=m+1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha-L, \qquad (5)$$

它的右端部分应以罗司变量表示。

---

① 在一般情况，这个不等式不能从第 64 頁上的不等式(19)导出，而是一个补充条件。对于自然系統，不等式(3)可以由 $L_2=\frac{1}{2} \sum_{r, s=1}^{n} a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$ 的正定性(L_2 是正定二次型)直接推出。此时，二次型的系数主子式

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\right)_{\alpha, \beta=m+1}^{n}=\det(a_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta=m+1}^{n}$$

是正的。

在此，变量 $t, q_i, q_\alpha, \dot{q}_i (i=1, \cdots, m;\ \alpha=m+1, \cdots, n)$ 被看作参数，因而，同样由唐肯定理，便有：

$$\frac{\partial R}{\partial q_i}=-\frac{\partial L}{\partial q_i},\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}=-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=1, \cdots, m), \tag{6}$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha=m+1, \cdots, n), \tag{7}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{8}$$

关于坐标 q_i 的拉格朗日方程，按照等式(6)，可以写成：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial R}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1, \cdots, m). \tag{9}$$

关于坐标 q_α 的拉格朗日方程

$$\frac{dp_\alpha}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha=m+1, \cdots, n)$$

連同公式(4)和(7)一起給出

$$\frac{dq_\alpha}{dt}=\frac{\partial R}{\partial p_\alpha},\ \frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha=m+1, \cdots, n). \tag{10}$$

方程(9)和(10)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial R}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1, \cdots, m), \\ &\frac{dq_\alpha}{dt}=\frac{\partial R}{\partial p_\alpha},\ \frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha=m+1, \cdots, n) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

构成罗司方程組。它是由 m 个拉格朗日型的二阶微分方程和 $2(n-m)$ 个哈密頓型的一阶微分方程組成的，而且，罗司函数在前 m 个方程中起着拉格朗日函数的作用，而在其余的方程中起着哈密頓函数的作用[①]。

---

① 如果我們希望保持广义冲量与拉格朗日函数間的关系，那么，在(11)的前一組方程中就得将函数 $-R$ 看作拉格朗日函数，因为，按公式(6)，

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial(-R)}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \cdots, m).$$

§ 14. 循环坐标

若坐标 q_α 不显含于拉格朗日函数，即$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$，则称其为循环坐标。

在推导哈密頓方程和罗司方程时我們曾得到等式

$$-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}. \tag{1}$$

由这些等式可知偏导数$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$、$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$和$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}$只能同时为零。因此，循环坐标也可以定义为不显含于哈密頓函数 H 或罗司函数 R 的坐标。这些定义是彼此等价的。

对应于循环坐标 q_α 的广义冲量在运动中保持其值不变。事实上，由正則方程，得：

$$\frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=0,$$

即 $p_\alpha=\text{const}=c_\alpha$。

現在假設有 $r=n-m$ 个循环坐标 $q_\alpha(\alpha=m+1, \cdots, n)$，它們不显含在$H$中，因之，与之对应的广义冲量 p_α 可代之以常数 c_α。于是①，

$$H=H(t, q_i, p_i, c_\alpha). \tag{2}$$

現在来写出关于非循环坐标的正則方程：

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1, \cdots, m). \tag{3}$$

由函数H的結构 (2) 可知方程 (3) 乃是关于 $2m$ 个未知函数 q_i, p_i $(i=1, \cdots, m)$的一組 $2m$ 个一阶微分方程。将这个方程組积分，便得到：

---

① 附标 i 取遍 $1, \cdots, m$ 各值，而附标 α 取遍 $m+1, \cdots, n$ 各值。

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(t, c_\alpha, c_i, c_i'), \\ p_i &= \psi_i(t, c_\alpha, c_i, c_i') \end{aligned} \quad (i=1, \cdots, m), \right\} \tag{4}$$

其中 c_i, c_i' $(i=1, \cdots, m)$是 $2m$ 个新的任意常数。将表达式(4)代入H后，便可以根据方程

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} \qquad (\alpha = m+1, \cdots, n) \tag{5}$$

借求积方法来确定 q_α:

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} dt + c_\alpha' \qquad (\alpha = m+1, \cdots, n). \tag{6}$$

因此，实质上，一切都归結为对方程組(3)的积分，組(3)是 $2m$ 阶的，它比原方程組的阶数 $2n$ 小 $2r$ 阶，这里 $r=n-m$ 是循环坐标的个数，也就是說，有 r 个循环坐标，就可以使方程組降低 $2r$ 阶。

方程組(3)是哈密頓型的。我們来指出，如何借罗司方程由m个拉格朗日型的二阶微分方程得到自治方程組①。事实上，将对应于循环坐标 q_α 的广义冲量 p_α 代之以常数 $c_\alpha(\alpha=m+1, \cdots, n)$，并将罗司函数写成 t, $q_i, \dot{q}_i$, 和 $c_\alpha(i=1, \cdots, m; \alpha=m+1, \cdots, n)$的函数形式:

$$R = R(t, q_i, \dot{q}_i, c_\alpha), \tag{7}$$

則关于非循环坐标的罗司方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i=1, \cdots, m) \tag{8}$$

就是所要求的自治方程組，而循环坐标 q_α 可由上节罗司方程(11)中相应的方程借求积得到:

$$q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial c_\alpha} dt + c_\alpha'. \tag{9}$$

① 这里，我們将不包含"多余"未知函数的微分方程組称为自治方程組。所謂"多余"的未知函数是指对所給方程組进行积分之前就能預先决定的那些未知函数。

这里$\frac{\partial R}{\partial c_\alpha}$中的全体 q_i 和 $\dot{q}_i$ 应事先代之以对方程組 (8) 进行积分而得到的关于 $2m+1$ 个变量 t, c_i 和 c_i' $(i=1, \cdots, m)$的函数。

例題. 在 § 12 末所考察的例題中

$$L=T-\Pi=\frac{1}{2}m[\dot{r}^2+(r^2+d^2)\dot{\varphi}^2]-\Pi(r),$$

φ 是循环坐标,

$$p_\varphi=m(r^2+d^2)\dot{\varphi}=\text{const}=c_\varphi.$$

罗司函数

$$R=p_\varphi\widehat{\dot{\varphi}}-\widehat{L}=\frac{1}{2}m[-\dot{r}^2+(r^2+d^2)\widehat{\dot{\varphi}^2}]+\Pi(r)=$$

$$=-\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2m}\frac{p_\varphi^2}{r^2+d^2}+\Pi(r)=$$

$$=-\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{c_\varphi^2}{2m}\frac{1}{r^2+d^2}+\Pi(r).$$

运动的确定归結为积分一个二阶微分方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial R}{\partial r}=0,$$

将它展开来便是:

$$m\ddot{r}=\frac{c_\varphi^2}{m}\frac{r}{(r^2+d^2)^2}-\Pi'(r).$$

这是重物沿軌道作相对运动的方程,因为在它的右端有离心力:

$$\frac{c_\varphi^2}{m}\frac{r}{(r^2+d^2)^2}=mr\dot{\varphi}^2 \quad (c_\varphi=p_\varphi).$$

循环坐标有时又称之为可遺坐标或隐坐标。这个名称可以这样来解釋:在对方程組(3)或(8)进行积分时,我們好像忘記了循环坐标的存在,而将 p_α 看作不变参数。

在所考察的例子中,“忘掉”循环坐标相当于“忘掉”軌道的轉动,而得到的則是重物沿軌道作相对运动的微分方程。

“循环坐标”这个名詞本身和如下事实有关:在許多力学問題中,描述沿封閉軌道(循环)运动的角 φ 不显含在 L 的表达式中,因而,是循环坐标。

我們来指出在具有循环坐标的完整系統和广义保守系統之間若干相似处。对于前一种系統，$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=0$，对于后一种系統，$\frac{\partial H}{\partial t}=0$。对于前者，有积分 $p_\alpha=\text{const}$，对于后者则有积分 $H=\text{const}$。往后在討論到力学的基本积分不变量时，将会看到这种相似的根本所在。

对于具有循环坐标的系統的运动，更深入的研究将在第七章中給出。

§15. 泊松括弧

本节将討論哈密頓运动方程組积分的某些性质。

函数 $f(t, q_i, p_i)$ 称为运动方程

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,\cdots,n)\tag{1}$$

的积分，如果对于所給系統的任何运动，这函数保持常值 c 不变[①]：

$$f(t, q_i, p_i)=c.\tag{2}$$

有时也将关系式(2)本身叫作积分。

函数 $H(q_i, p_i)$ 是广义保守系統的一个积分。如果 q_α 是循环坐标，则 p_α 是积分。

显然，如果函数 $f_1,\cdots,f_l$ 都是运动方程的积分，则这些积分的任意函数

$$F(f_1,\cdots,f_l)$$

仍然是积分。因此，往后我們将仅对独立的积分感到兴趣。

如果已經知道了由 $2n$ 个独立积分 $f_1,\cdots,f_{2n}$ 构成的积分"完全"組（n 是系統的自由度），则由关系式

① 当由系統的某一运动轉到另一运动时，常数 c 的大小将会改变。

$$f_k(t, q_i, p_i) = c_k \qquad (k=1, \cdots, 2n) \tag{3}$$

解出 q_i 和 p_i 来就得到有限形式的运动方程:

$$q_i = \varphi_i(t, c_1, \cdots, c_{2n}), \quad p_i = \psi_i(t, c_1, \cdots, c_{2n}), \tag{4}$$

这些方程包含 $2n$ 个任意常数 $c_1, \cdots, c_{2n}$。

因此，如果知道了 $2n$ 个独立积分，那也就知道了系統的一切运动。如果知道了 l 个独立积分 $f_1, \cdots, f_l$，其中 $l<2n$，则对系統的运动我們就只有部分的概念，而且 l 愈大，这个概念愈完全。因此，我們总希望找到尽可能多的独立积分。

我們在这里来介紹泊松和雅科毕提出的求运动方程积分的方法。

設 $f(t, q_i, p_i)$ 是方程(1)的积分。则当以哈密頓方程組(1)的任何解替代 $q_i, p_i(i=1, \cdots, n)$时，函数 f 变为常数 c，即按方程(1)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = 0. \tag{5}$$

泊松对于由任意二函数 $\varphi(t, q_i, p_i)$和 $\psi(t, q_i, p_i)$的偏导数所构成的如下表达式引入了一个特殊的符号——泊松括弧:

$$(\varphi\psi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right). \tag{6}$$

利用泊松括弧可以把公式(5)——使函数 $f(t, q_i, p_i)$ 成为方程(1)的积分的必要充分条件——写成

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (fH) = 0. \tag{7}$$

泊松括弧有如下的性质:

对于任意的函数 $\varphi(t, q_i, p_i), \psi(t, q_i, p_i), \chi(t, q_i, p_i)$:

1°. $(\varphi\psi) = -(\psi\varphi)$;

2°. $(c\varphi, \psi) = c(\varphi\psi)$ (c 是常数);

3°. $(\varphi+\psi, \chi) = (\varphi\chi) + (\psi\chi)$;

4°. $((\varphi\psi)\chi)+((\psi\chi)\varphi)+((\chi\varphi)\psi)=0$;

5°. $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\psi)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\psi\right)+\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$.

恒等式 1°, 2°, 3°, 5° 可以直接由泊松括弧的定义(6)得到。

恒等式 4° 叫作泊松恒等式，可借特殊方式来证明。令 X 和 Y 是作用在函数 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 上的两个一阶微分算子:

$$Xf=\sum_{k=1}^{m}X_k\frac{\partial f}{\partial x_k},\quad Yf=\sum_{k=1}^{m}Y_k\frac{\partial f}{\partial x_k},\tag{8}$$

其中 $X_k, Y_k(k=1, \cdots, m)$ 都是变量 $x_1, \cdots, x_m$ 的函数。于是，“换位子” $Z=XY-YX$ 也是一阶算子①，

$$Zf=X(Yf)-Y(Xf)=\sum_{k=1}^{m}[X(Y_k)-Y(X_k)]\frac{\partial f}{\partial x_k}.\tag{9}$$

現在回到泊松括弧(φf)上来。这些括弧可以看作是将形如(8)式的綫性算子 Φ 用于变量为 $q_i, p_i(i=1, \cdots, n)$ 的函数 f 上的結果:

$$\Phi f=(\varphi f)=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right).\tag{10}$$

这个一阶微分算子完全决定于函数 φ。函数 ψ 和 χ 也可以定义两个类似算子 Ψ 和 X。

現在来直接证明恒等式 4°。将 4° 式左端的任一双重括弧展开，則其每一項都将包含函数 φ 或 ψ，或 χ 的二阶偏导数作为因子。但是，$((\varphi\psi)\chi)$却不包含 χ 的二阶偏导数，而和式

$$((\psi\chi)\varphi)+((\chi\varphi)\psi)=(\psi(\varphi\chi))-(\varphi(\psi\chi))=$$
$$=(\Psi\Phi-\Phi\Psi)\chi$$

乃是关于 χ 的一阶微分算子。因此，泊松恒等式的左端不包含 χ 的二阶偏导数，由于对称性，显然也不包含 φ 和 ψ 的二阶偏导数。

① 直接計算表明，(9)式右端含有函数 f 二阶偏导数的各項互相抵消。

換句話說，4°式左端的一切項都相互抵消了。这就是所要证明的。

現在来证明一个基本定理。

雅科毕-泊松定理. 如果 f 和 g 是运动方程的两个积分，則 (fg) 也是运动方程的积分。

证明. 我們来证明如果函数 f 和 g 都滿足关系式(7)：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(fH)=0,\ \frac{\partial g}{\partial t}+(gH)=0, \tag{11}$$

則函数(fg)也滿足同样的关系：

$$\frac{\partial (fg)}{\partial t}+((fg)H)=0. \tag{12}$$

事实上，根据恒等式 5°，

$$\frac{\partial}{\partial t}(fg)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}g\right)+\left(f\frac{\partial g}{\partial t}\right)=-((fH)g)-(f(gH))=$$

$$=((Hf)g)+((gH)f).$$

于是，由泊松恒等式立即可得：

$$\frac{\partial (fg)}{\partial t}+((fg)H)=((fg)H)+((gH)f)+((Hf)g)=0.$$

定理证毕。

上述定理給了我們一个法則，利用这个法則可以由二个积分 $f(t,q_i,p_i)$和 $g(t,q_i,p_i)$經代数运算和微分运算后得到第三个积分：

$$(fg)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right).$$

例如，取 f 和(fg)的泊松括弧，仍然得到一个积分，如此等等。但是不要忘記，这样得到的新的积分可能恒等于零，或者是已知积分的函数。因此，只有选擇特別的独立积分 $f_1,\cdots,f_l(l<2n)$，才可期望利用泊松括弧得到（对完全积分組而言）所短少的积分 $f_{l+1},\cdots,f_{2n}$。

作为一个例子①，我們来討論与外界作用完全隔絕的自由质点系統的动量积分和动量矩积分②：

$$P_x=\sum p_x,\quad P_y=\sum p_y,\quad P_z=\sum p_z,$$

$$M_x=\sum m_x=\sum(yp_z-zp_y),\quad M_y=\sum m_y=\sum(zp_x-xp_z),$$

$$M_z=\sum m_z=\sum(xp_y-yp_x),$$

其中

$$p_x=m\dot{x},\quad p_y=m\dot{y},\quad p_z=m\dot{z}.$$

如果系統是孤立的，则函数 $P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z$ 都是积分，即存在"守恒积分"：

$$P_x=c_1,\quad P_y=c_2,\quad P_z=c_3,\quad M_x=c_4,\quad M_y=c_5,\quad M_z=c_6. \tag{13}$$

当有主矢量为 $\boldsymbol{R}(X, Y, Z)$、主矩为 $\boldsymbol{L}_0(L_x, L_y, L_z)$ 的外力場存在时，如果量 X, Y, Z, L_x, L_y, L_z 中的某一个为零，则(13)式中相应的积分成立。

現在对于与一个质点相关的量取泊松括弧：

$$(p_xp_y)=0,\quad (p_xm_y)=-\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\frac{\partial m_y}{\partial x}=p_z,$$

$$(m_xm_y)=\frac{\partial m_x}{\partial z}\frac{\partial m_y}{\partial p_z}-\frac{\partial m_x}{\partial p_z}\frac{\partial m_y}{\partial z}=xp_y-yp_x=m_z.$$

我們注意，当泊松括弧中的一个量（p 或 m）屬于某一质点，而第二个量又屬于另一质点时，泊松括弧总是等于零的。因此，

$$\left.\begin{aligned}(P_xP_y)&=\sum(p_xp_y)=0,\\(P_xM_y)&=\sum(p_xm_y)=\sum p_z=P_z,\\(M_xM_y)&=\sum(m_xm_y)=\sum m_z=M_z.\end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

将字母 x, y, z 循环置换就得到类似的关系式：

$$\left.\begin{aligned}&(P_yP_z)=0,\quad (P_zP_x)=0,\\&(P_yM_z)=P_x,\quad (P_zM_x)=P_y,\\&(M_yM_z)=M_x,\quad (M_zM_x)=M_y.\end{aligned}\right\} \tag{14''}$$

六个守恒定律(13)并非独立的。由关系式(14′)和(14″)可以断定，如果有积分

$$P_x=c_1,\quad M_x=c_4,\quad M_y=c_5, \tag{15}$$

---

① 見 Ландау Л., Пятигорский Л. 著 Механика, М.—Л., 1940, 第 151 頁。

② 在本例中，这里及其后和号都是对系統全体质点求和的。

则必有积分

$$P_y=c_2,\quad P_z=c_3,\quad M_z=c_6. \tag{16}$$

自然，这一切只是对于势力场才是正确的。在非势力场中，由等式

$$X=0,\quad L_x=0,\quad L_y=0 \tag{17}$$

不能导出等式

$$Y=0,\quad Z=0,\quad L_z=0①. \tag{18}$$

① 只有当满足等式(17)时，才有守恒积分(15)。与此相仿，积分(16)只有在等式(18)存在时才成立。

第三章　变分原理和积分不变量

§ 16. 哈密頓原理

我們来看有 n 个独立坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 和拉格朗日函数 $L(t, q_i, \dot{q}_i)$的任意完整系統。

积分

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L dt \tag{1}$$

叫做在时間区間(t_0, t_1)上的（哈密頓）作用量，而表达式 Ldt 則称为元作用量[①]。

因为函数 L 具有 $L=L(t, q_i, \dot{q}_i)$的形式，所以，为了計算作用量(1)就必須給定时間間隔 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上的函数$q_i = q_i(t)$ $(i=1, \cdots, n)$。換句話說，作用量W乃是依賴于系統运动的泛函数。

如果我們任意地給出一組函数 $q_i = q_i(t)$ $(i=1, \cdots, n)$，那么我們就有了一个在运动学上可能的运动（为約束所容許的运动）。这样的运动可用以 q_i 和时間 t 为坐标的 $n+1$ 維增广坐标空間里的一条曲綫来表示。我們来考察所有可能的这种曲綫——过空間已知两点 $M_0(t_0, q_i^0)$和 $M_1(t_1, q_i^1)$的“路徑”（見图 29，这是关于 $n=2$ 的情况），也就是将系統由其初始时刻 t_0 所在之位置(q_i^0)轉移到时刻 t_1 所在之終了位置(q_i^1)的所有可能的运动。这里，初始时刻 t_0 和終了时刻 t_1、系統的初始位置和終了位置都是事先給定了的。至于运动的中間过程則是任意的。

---

① 对于自然系統，$L=T-\Pi$ 有与能量相同的量綱。因此，作用量的量綱是：能量×时間≡力×长度×时間。

如果是非自由的自然系統，則我們所考察的运动就只受一个限制：在系統运动时，加在系統各点上的約束不能被破坏。当以独立坐标給出运动时，即給出 $q_i=q_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$，这条件是自动滿足的。

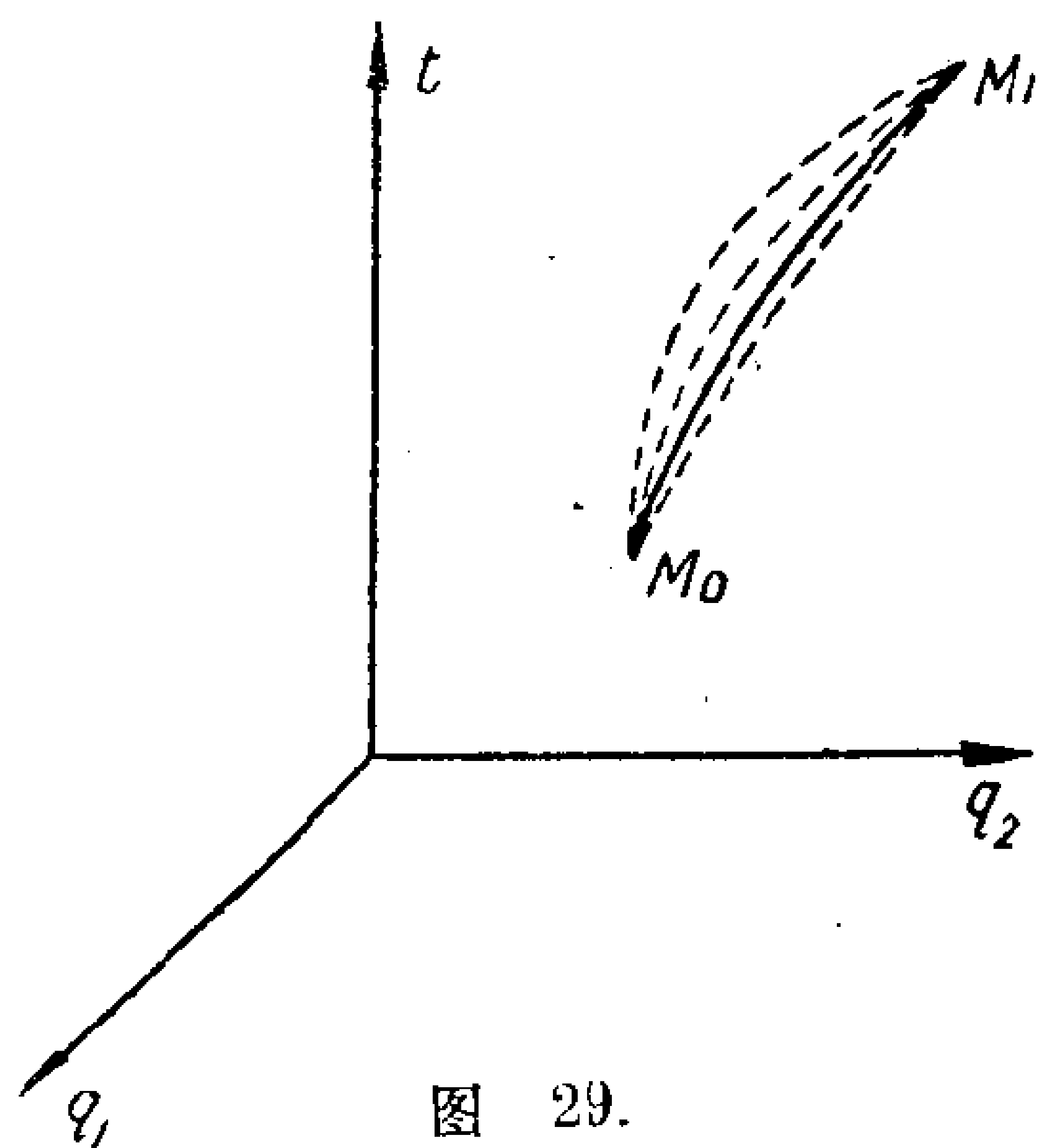


图 29.

假設在所考察的路徑中存在一条所謂的“正路”，即在給定的 L 函数下（也就是給定力場下），系統运动所沿的路徑。对于正路，函数組 $q_i=q_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 滿足拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,\cdots,n). \tag{2}$$

我們将过点 M_0 和 M_1 的所有其他路徑称为“旁路”。（在图 29 上，正路用实綫表示，旁路用虛綫表示。）

我們来证明，和旁路相比，作用量 W 在正路上有极値（严格地說，是逗留値）。这就是哈密頓原理①。

我們来看任意的单参数路徑族

$$q_i=q_i(t,\alpha)(t_0\leqslant t\leqslant t_1;\ -\gamma\leqslant\alpha\leqslant\gamma;\ i=1,\cdots,n);$$

当 $\alpha=0$ 时它給出正路，当 $\alpha\neq 0$ 时則得旁路。設所有的这些路徑有共同的始点 M_0 和終点 M_1: $q_i(t_0,\alpha)=q_i^0$, $q_i(t_1,\alpha)=q_i^1$ $(-\gamma\leqslant\alpha\leqslant\gamma;\ i=1,\cdots,n)$。

沿族中路徑計算的作用量 W 乃是参数 α 的函数:

---

① 这个原理包含在哈密頓于1834—1835 年发表的著作中（見 сборник “Вариационные принципы механики”, М., 1959, 第 239 頁）。这里，哈密頓假定了系統是平稳的（他将动能 T 表示为广义速度的二次型作为出发点）。对于非平稳約束的一般情况，这个原理是由 M. B. 奥斯特罗格拉得斯基于 1848 年給出并論证的（見同书 770—771, 829）。因此，上述原理有时称为哈密頓—奥斯特罗格拉得斯基原理。

$$W(\alpha)=\int_{t_0}^{t_1} L[t, q_i(t,\alpha), \dot{q}_i(t,\alpha)]dt.$$

我們来計算作用量W的变分，即对 α 的微分：

$$\delta W=\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt=$$

$$=\Big|_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt. \tag{3}$$

在此，为了变换(3)式中的积分，我們利用了分部积分法和变分运算 δ 与(对时間的)微分运算$\frac{d}{dt}$的可交换性质：

$$\delta\dot{q}=\delta\frac{d}{dt}q_i(t,\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{d}{dt}q_i(t,\alpha)\delta\alpha=$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}q_i(t,\alpha)\delta\alpha\right]=\frac{d}{dt}\delta q_i.$$

此外，因为路徑的始末两端不变，所以当 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 时，变分 $\delta q_i=0$。因此，被积出的部分等于零。

由等式(3)可以看出，对于正路($\alpha=0$ 的路徑)而言，根据拉格朗日方程，(3)式最后一个积分号下的表达式是等于零的。因此，

$$\text{对于正路，}\ \delta W=0. \tag{4}$$

这就是哈密頓原理的数学形式。

反之，若对于某路徑 $\delta W=0$，则这路徑是正路。事实上，由于变分 $\delta q_i(i=1,\cdots,n)$的任意性(δq_i 在路徑两端为零，在其余各点完全任意)，根据等式(3)，由条件 $\delta W=0$ 即得等式(2)，即关于正路的拉格朗日方程。

由于从哈密頓原理可以导出独立坐标下的拉格朗日方程（反

之亦然)，所以哈密頓原理可以作为完整系統的动力学基本原理①。

正路(在給定的L函数下，"眞正"的运动)既可以用拉格朗日型的运动微分方程来規定，也可以用哈密頓变分原理来規定。但是，运动微分方程和变分原理之間却有着原則性的差別。

运动微分方程表示出时刻t和在此时刻系統各点的位置、速度、加速度之間的关系。如果在某路徑的每一点上，这个关系都得到滿足，則此路徑必是正路。而变分原理則是从整体上規定了整个正路。它表述出某一泛函数的极値(逗留値)性质，这个性质使我們得以将正路从其他在运动学上可能的路徑中区分出来。变分原理有着更直观更紧凑的形式，常被用作新力学部門(非古典力学)的基础。

注. 微分方程(2)是使一阶变分δW等于零的必要而充分条件；这里的W是形如(1)式的积分。在变分法中，方程(2)叫做关于变分問題

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i)dt=0$$

的欧拉微分方程。

为了論证哈密頓原理，曾經利用了独立坐标下的拉格朗日方程。然而，在自然系統的情况下，这些方程本身則是得自动力学普遍方程

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu)\delta\boldsymbol{r}_\nu=0. \tag{5}$$

我們来指出怎样利用动力学普遍方程(5)直接导出哈密頓原理。这样，拉格朗日方程也就可以立即由哈密頓原理得出。

如果在$\boldsymbol{r}_\nu$的表达式

① 前述哈密頓原理的表述形式是在力有势(自然系統的情况)的前提下得到的。原理的更一般表述形式(包括非有势力情况)将在下面給出[見 89 頁，公式(9)]。

$$\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{r}_\nu(t,q_i)\quad(\nu=1,\cdots,N)$$

中，将 q_i 代之以函数 $q_i(t,\alpha)$，则 $\boldsymbol{r}_\nu$ 就成为 t 和 α 的复合函数。将这个复合函数对 α 微分(即取其变分)即得：

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i\ \ (\nu=1,\cdots,N). \tag{6}$$

这个公式和第30頁上那个用来确定完整系統各点虛位移的公式(8)完全一样。因此，在任何时刻 t，矢徑的变分就是系統质点的虛位移。

即使不利用公式(6)，而只从变分和虛位移的定义出发也可以确信上述論断是正确的。事实上，变分 $\delta\boldsymbol{r}_\nu=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_\nu}{\partial\alpha}\delta\alpha$ 乃是系統中点 P_ν 的这样一个无限小位移：由对应于某一固定 α 値的軌道 ($\alpha=0$ 时就是正路)上一点到对应于参数値为 $\alpha+\delta\alpha$ 的相邻軌道上一点的位移(图30)；而相邻軌道上的这两个点则是对同一个时刻 t 取的，因为当对 α 微分时，t 的値是固定不变的。因此，$\delta\boldsymbol{r}_\nu$ 就是点 P_ν 从它在时刻 t 的一个可能位置到同一时刻另一个可能位置的位移，即 $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ 是系統 P_ν 点的虛位移。

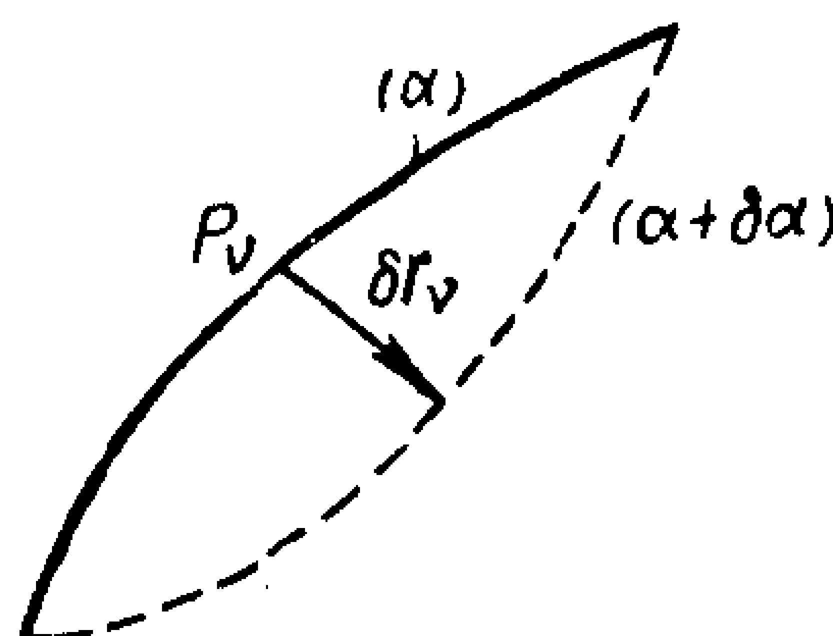


图　30.

因此，我們可以将动力学普遍方程(5)中的 $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ 看作矢徑 $\boldsymbol{r}_\nu$ 的变分。但由于运算 $\dfrac{d}{dt}$ 和 δ (对 α 的微分)的次序可以調换：

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}_\nu=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha}\boldsymbol{r}_\nu(t,\alpha)\delta\alpha=\frac{\partial}{\partial\alpha}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu(t,\alpha)\delta\alpha=\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu.$$

因之

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu-\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}_\nu=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu-\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\delta\boldsymbol{r}_\nu-\delta T, \tag{7}$$

其中 δT 是动能 $T=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2$ 的变分。

我們仍以 δA 表示主动力 $\boldsymbol{F}_\nu$ 在虛位移 $\delta\boldsymbol{r}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 上的元功，则利用(7)式可将方程(5)写作如下形式：

$$\delta T+\delta A-\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \delta r_\nu=0.$$

将上式两端在从 $t=t_0$ 到 $t=t_1$ 的区間上对 t 积分:

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta A)dt-\left[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu\right]_{t=t_0}^{t=t_1}=0. \tag{8}$$

这里$[\ \ ]_{t=t_0}^{t=t_1}$表示方括弧內的表达式在 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 时的两个值之差。但当 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 时矢徑 $\boldsymbol{r}_\nu$ 无变更(因为系統的始末位置是事先給定了的):

$$\boldsymbol{r}_\nu(t_0,\alpha)=\boldsymbol{r}_\nu^0,\ \ \boldsymbol{r}_\nu(t_1,\alpha)=\boldsymbol{r}_\nu^{(1)}(\nu=1,\cdots,N).$$

所以,当 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 时, $\delta \boldsymbol{r}_\nu=0$。因之,(8)式中的第二項等于零,于是,可以写作

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta A)\,dt=0. \tag{9}$$

我們来看力有势 $\Pi=\Pi(t,q_i)$的情况。在这情况下,

$$\delta A=-\delta\Pi,$$

其中 $\delta\Pi$ 是函数 $\Pi(t,q_i)$的虚微分(变分)①,因而等式(9)可以写成

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T-\delta\Pi)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt=0,$$

由此即得

$$\delta W=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt=0.$$

于是,由动力学基本方程(5)我們得到了哈密頓原理 $\delta W=0$。如前所述,由此便可以立即得到拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\ \ (i=1,\cdots,n).$$

在非有势力 Q_i 的情况下,为了得到拉格朗日方程,代替等式(4),应当由等式(9)出发。将公式(3)[将其中的函数 L 代之以函数 $T(t,q_i,\dot{q}_i)$] 用于积

① 即 $\delta\Pi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\delta q_i.$

分$\int_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt$，并利用主动力的元功表达式$\delta A=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i$，即得：

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt=0. \tag{10}$$

根据量$\delta q_i(i=1,\cdots,n)$的任意性，(10)式积分号下括弧里的表达式应当等于零，也就是説，正路应当满足拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i\quad(i=1,\cdots,n). \tag{11}$$

現在来説明，沿正路的作用量之值比之沿旁路是否为极小。

作为一个例子，我們来看力場不存在时，被迫沿球面运动的非自由質点的运动（按其惯性在球面上运动）。假設質点的質量$m=1$。在球坐标中(图31)

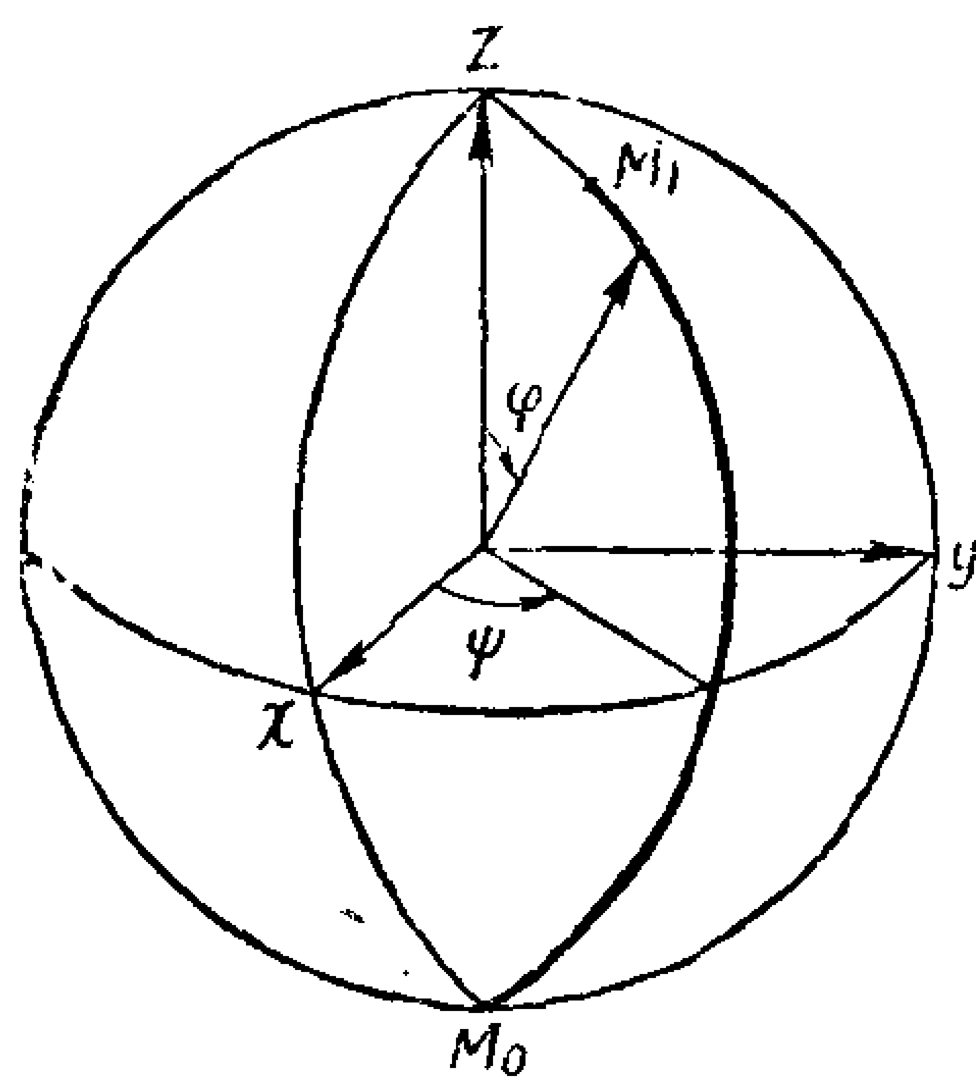


图 31.

$$L=\frac{v^2}{2}=\frac{R^2}{2}(\dot{\varphi}^2+\sin^2\varphi\dot{\psi}^2).$$

对于正路

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=\text{const}$$

(ψ是循环坐标)，即

$$\ddot{\varphi}-\sin\varphi\cos\varphi\dot{\psi}^2=0,\quad \sin^2\varphi\dot{\psi}=\sin^2\varphi_0\dot{\psi}_0.$$

对于正路，可以认为初速度$\boldsymbol{v}_0$沿子午綫($\psi=\text{const}$)方向，即$\dot{\psi}_0=0$(这并不損害問題的一般性)。于是，有

$$\dot{\psi}=0,\quad \dot{\varphi}=\text{const},\quad v^2=R^2\dot{\varphi}^2=\text{const}.$$

因此正路乃是沿大圓弧的等速运动。此时

$$W_{旁路}-W_{正路}=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(v^2-v_0^2)dt=$$

$$=v_0\int_{t_0}^{t_1}(v-v_0)dt+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(v-v_0)^2dt\geqslant$$

$$\geqslant v_0\int_{t_0}^{t_1}(v-v_0)dt=v_0(\sigma_{\text{旁路}}-\sigma_{\text{正路}}).$$

在球面上連結 M_0 和 M_1 两点的大圓弧长 $\sigma_{\text{正路}}$ 总是小于連結相同两点的任何其他曲綫之长 $\sigma_{\text{旁路}}$。因此，

$$W_{\text{正路}}<W_{\text{旁路}}.$$

但这只有当$\sigma_{\text{正路}}=\smile M_0M_1<\pi R$时才是正确的。当$\sigma_{\text{正路}}>\pi R$时，$W_{\text{正路}}$就不再总是小于$W_{\text{旁路}}$，而作用量$W$的最小值将在大圓补弧($M_0$ 和 M_1 之間的最短距离）上被达到。如果沿大圓弧移动点 M_1 以使此弧長增大，則 M_0 的对徑点(直徑的两个端点互为对徑点——譯者)是一临界点（当 M_1 达到此点之前 $W_{\text{正路}}$ 取极小値，而于此点之后則不然)，将它記作 M_0^*。

在一般情况下，也有类似的情形。可以证明①，当 M_1 点充分靠近 M_0 时，只有一条或有限条正路通过 M_0 和 M_1。而当点 M_1 离M_0 足够远时，則可能有无穷多条正路通过 M_0 和 M_1。点 M_1 的这样一个临界位置 M_0^* 称之为 M_0 的共軛动焦点。于是，得到以下的論断：当在弧 M_0M_1 上无 M_0 的共軛动焦点 M_0^* 时，沿正路 M_0M_1 的作用量比之沿旁路有极小値。

§ 17. 第二种型式的哈密頓原理

現在来讲哈密頓变分原理的另一个型式。代替 $n+1$ 維增广坐标空間，我們来看 $2n+1$ 維增广相空間，在这个空間里，点的坐标是量q_i, p_i($i=1,\cdots,n$)和 t。我們来考察在这个空間中过 $B_0(q_i^0, p_i^0, t_0)$和 $B_1(q_i^1, p_i^1, t_1)$ 两点的正路以及联結这两点的一切可能的其他曲綫("旁路"；見图 32, $n=1$)。

---

① 見 Бобылев Д. К., О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия Лагранжа, 載于 т. LII Зап. Ак. наук, СПб, 1889.

給出正路的那些函数 $q_i(t)$ 和 $p_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 滿足哈密頓方程

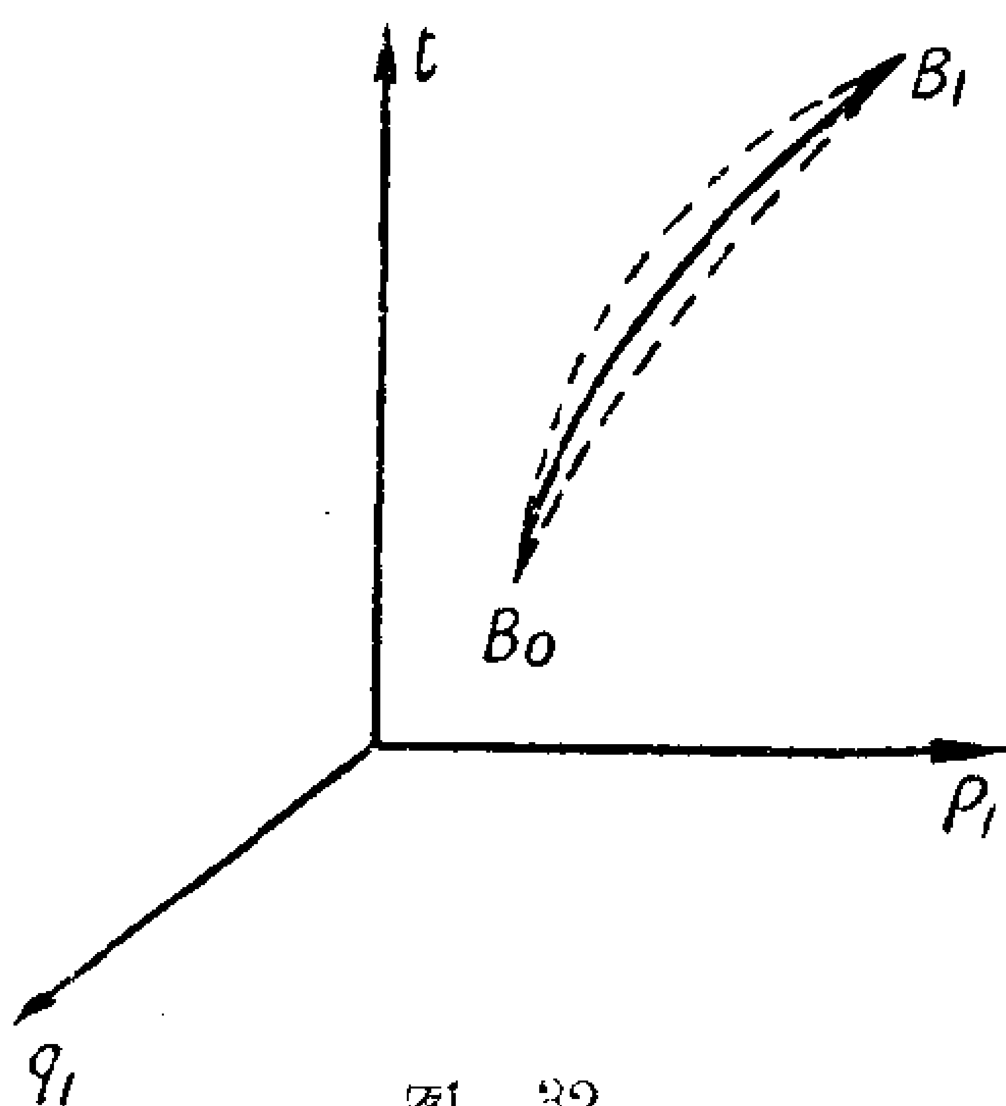


图　32.

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\cdots,n). \tag{1}$$

在討論中我們引入一个依賴于 $4n+1$ 个独立变量的函数 $L^*(t,q_i,p_i,\dot{q}_i,\dot{p}_i)$，它由如下等式来确定①：

$$L^*=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-H(t,q_i,p_i). \tag{2}$$

不难看出，利用这个函数可以将哈密頓正則方程(1)写成拉格朗日方程的型式：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L^*}{\partial q_i}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i}-\frac{\partial L^*}{\partial p_i}=0\quad (i=1,\cdots,n). \tag{3}$$

因为正路由拉格朗日型的方程(3)所規定，所以，如前所述，利用积分

$$\int_{t_0}^{t_1}L^*(t,q_i,p_i,\dot{q}_i,\dot{p}_i)dt \tag{4}$$

在正路上有逗留值，即

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L^*dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-H\right)dt=0, \tag{5}$$

便可使增广相空間中的正路从旁路中被区分出来。

乍看上去似乎哈密頓原理的第二种型式(5)与第一种型式 $\delta W=0$ 并无任何差別，因为按第67頁上的公式(8)，表达式 L^* 和函数 L 是一样的。但事情并非永远如此。这只对系統的运动才是正确的，也就是說只对这样的路徑 $q_i=q_i(t),\ p_i=p_i(t)\ (i=1,\cdots,n)$ 才是对的，在这路徑上函数 $q_i(t)$ 和 $p_i(t)$ 以如下关系相联系：

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\quad (i=1,\cdots,n). \tag{6}$$

---

①　等式(2)的右端实际上并未包含量 $\dot{p}_i$，因此，在所給情况下，函数 L^* 与这些量无关，因而，$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i}=0\ (i=1,\cdots,n)$。

然而，在第二种型式的哈密頓原理中(与第一种型式不同！)，$2n+1$ 維增广相空間中过 B_0 和 B_1 两点的任何曲綫都可以作为旁路进行比較。对于这些路徑，关系式(6)并不一定被滿足，因之，在一般情况下，对于这些路徑 $L^* \neq L$。如果对于公式(5)，仅限于滿足等式(6)的那些旁路，则哈密頓原理的第二种型式就轉变为第一种型式：$\delta W=0$。

还須注意，和哈密頓原理第一种表述形式中的点 M_0 和 M_1 不同，点 B_0 和 B_1 是不能任意选取的，因为在一般情况下，对于增广相空間中的任意两点不一定会有正路通过。点 B_0 和 B_1 应当在哈密頓原理所規定的正路上取。

§18. 力学基本积分不变量(龐伽雷-卡当积分不变量)

我們現在来导出如下的一般情况下作用量变分 δW 的公式，即初始时刻和終了时刻以及初始坐标和終了坐标都不是固定的，而是参数 α 的函数：

$$\left.\begin{array}{l} t_0=t_0(\alpha),\ q_i^0=q_i^0(\alpha), \\ t_1=t_1(\alpha),\ q_i^1=q_i^1(\alpha) \end{array} \quad (i=1,\cdots,n).\right\} \tag{1}$$

在这情况下，将积分 $W=\int_{t_0}^{t_1} L dt$ 对参数 α 微分，并进行分部积分，便得到

$$\delta W=\delta\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt$$

$$=L_1\delta t_1-L_0\delta t_0+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\delta L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt=$$

$$=L_1\delta t_1+\sum_{i=1}^{n}p_i^1[\delta q_i]_{t=t_1}-L_0\delta t_0-\sum_{i=1}^{n}p_i^0[\delta q_i]_{t=t_0}+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt, \tag{2}$$

其中

$$[\delta q_i]_{t=t_\lambda}=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}q_i(t,\alpha)\right]_{t=t_\lambda}\delta\alpha\ \ (i=1,\cdots,n;\ \lambda=0,1). \quad (3)$$

另一方面，对于終了坐标 $q_i^1=q_i^1[t_1(\alpha),\alpha]$ 的变分，有如下公式:

$$\delta q_i^1=\dot{q}_i^1\delta t_1+\left[\frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial\alpha}\right]_{t=t_1}\delta\alpha$$

或

$$\delta q_i^1=[\delta q_i]_{t=t_1}+\dot{q}_i^1\delta t_1\ \ (i=1,\cdots,n).$$

因之，

$$[\delta q_i]_{t=t_1}=\delta q_i^1-\dot{q}_i^1\delta t_1\ \ (i=1,\cdots,n). \quad (4)$$

完全类似地有

$$[\delta q_i]_{t=t_0}=\delta q_i^0-\dot{q}_i^0\delta t_0\ \ (i=1,\cdots,n). \quad (5)$$

将 $[\delta q_i]_{t=t_1}$ 和 $[\delta q_i]_{t=t_0}$ 的表达式(4)和(5)代入 δW 的表达式(2)中，并注意到

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L=H,$$

我們就得到作用量的变分 δW 在一般情况下的如下公式:

$$\delta W=\left[\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t\right]_0^1+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i dt, \quad (6)$$

其中

$$\left[\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t\right]_0^1=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}p_i^1\delta q_i^1-H_1\delta t_1-\sum_{i=1}^{n}p_i^0\delta q_i^0+H_0\delta t_0.$$

在任一 α 值所对应的路徑都是正路(即 $q_i=q_i(t,\alpha)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是一族正路)的特殊情况下，对于任何 α 等式(6)右端的积分，都将等于零，因而作用量的变分公式取如下的簡单形式:

$$\delta W = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t \right]_0^1. \tag{7}$$

我們取 $2n+1$ 維增广相空間(在此空間中，点的坐标是 q_i, p_i $(i=1, \cdots, n)$ 和 t)来代替 $n+1$ 維增广坐标空間，并在其中取一条任意的閉曲綫 C_0，它的方程式是

$$q_i = q_i^0(\alpha), \quad p_i = p_i^0(\alpha), \quad t = t_0(\alpha) \tag{8}$$
$$(i=1, \cdots, n; 0 \leqslant \alpha \leqslant l).$$

这里，$\alpha=0$ 和 $\alpha=l$ 是曲綫 C_0 上的同一点。我們以曲綫 C_0 上的每个点作为始点，各引一条正路(这样的路徑，在給定始点之后，由哈密頓正則方程組所唯一决定)，便得到一个封閉的正路管(見图33, $n=1$):

$$q_i = q_i(t, \alpha), \quad p_i = p_i(t, \alpha)$$
$$(i=1, \cdots, n; 0 \leqslant \alpha \leqslant l), \tag{9}$$

其中

$$q_i(t, 0) \equiv q_i(t, l),$$
$$p_i(t, 0) \equiv p_i(t, l)$$
$$(i=1, \cdots, n).$$

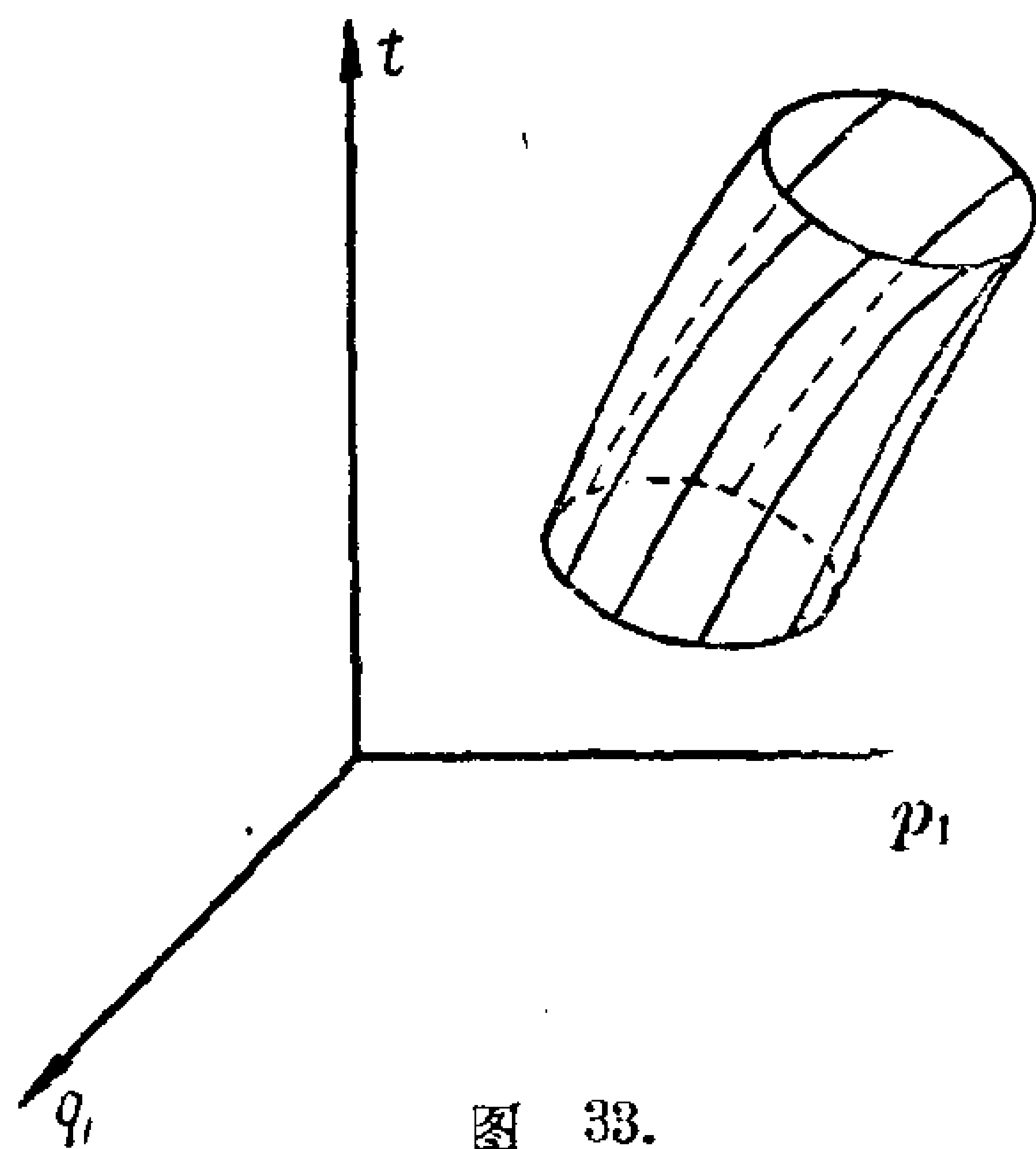


图 33.

在这管子上再任取一条閉曲綫 C_1，使之包圍此管，并和管子的每根母綫仅有一个交点。曲綫 C_1 的方程可以写成如下形式①

$$q_i = q_i^1(\alpha), \quad p_i = p_i^1(\alpha), \quad t = t_1(\alpha). \tag{10}$$

我們来考察沿管子母綫从曲綫 C_0 到曲綫 C_1 的作用量 W:

① 对于区間 $0 \leqslant \alpha \leqslant l$ 內的每一个 α 值，都有正路管的一条确定的"母綫"与之对应，而在这条母綫上只有曲綫 C_1 的一个点。因此，对于每个 α 值只有曲綫 C_1 上的一个点与之对应，即曲綫 C_1 上各点的坐标是参数 α 的函数。

$$W = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt.$$

按公式(7)、在任何 α 的情况下，我們都有

$$\delta W = W'(\alpha)\delta\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1.$$

将这等式在 $\alpha=0$ 到 $\alpha=l$ 的区間上对 α 逐項积分之，我們便得到:

$$0 = W(l) - W(0) = \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1 =$$

$$= \int_0^l \sum_{i=1}^{n} p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1 - \int_0^l \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \delta q_i^0 - H_0 \delta t_0 =$$

$$= \oint_{C_1} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t - \oint_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t,$$

即

$$\oint_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t = \oint_{C_1} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t. \tag{11}$$

于是，得到以下的論断：当任一封閉迴路沿正路管作任意移动(还可以变形)时，沿此閉迴路的曲綫积分

$$I = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t \tag{12}$$

保持其值不变，也就是説它是个积分不变量。我們把积分 I 叫做龐伽雷—卡当积分不变量。

現在来证明一个逆命題。設正路由一阶微分方程組

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_j, p_j), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_j, p_j)$$

$$(i = 1, \cdots, n) \tag{13}$$

所确定。(这样的假設是很自然的,因为系統的运动应当由其初始数据 q_i^0, $p_i^0(i=1,\cdots,n)$唯一决定。)此外,假設給出了龐伽雷—卡当积分(12)是由方程組(13)所确定的正路的积分不变量,也就是說,对于由这些正路所組成的任何管子,当包圍这管子的封閉迴路上的点随此迴路沿管之母綫作任意移动时,沿此迴路的龐伽雷—卡当积分将保持其値不变。我們要证明函数 H 和函数 Q_i, P_i 之間有如下的关系:

$$Q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,\cdots,n), \tag{14}$$

即方程(13)是哈密頓正則方程,而其哈密頓函数則是 I 的积分号下表达式中的函数 H。

为证明此命題,我們在方程組(13)中再补增一个方程,以便引进一輔助变量(参数)μ:

$$\frac{dq_1}{Q_1}=\cdots=\frac{dq_n}{Q_n}=\frac{dp_1}{P_1}=\cdots=\frac{dp_n}{P_n}=\frac{dt}{1}=\pi d\mu. \tag{15}$$

这里,$\pi=\pi(t,q_i,p_i)$是增广相空間內点的任意函数。将方程組(15)积分,我們便得到与变量 μ 和任意的初始数据 q_i^0, $p_i^0(i==1,\cdots,n)$和 t^0(当 $\mu=0$ 时的数据)有关的函数形式所給出的 q_i, p_i 和 t 的表达式:

$$\left.\begin{aligned}&q_i=\varphi_i(\mu;q_j^0,p_j^0,t_0),\\&p_i=\psi_i(\mu;q_j^0,p_j^0,t_0),\ (i=1,\cdots,n).\\&t=\chi(\mu;q_j^0,p_j^0,t_0)\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

这是整个正路族的参数方程。因为我們所需要的仅仅是組成給定管子的那些正路,所以应当取曲綫 C_0 上的点 $M_0(q_j^0,p_j^0,t_0)$作为始点,也就是說,应当将方程(16)中的 q_j^0, p_j^0, t_0 代之以

$$q_j^0(\alpha),\quad p_j^0(\alpha),\quad t_0(\alpha).$$

这样,我們便得到組成給定管子的那些正路的参数方程:

$$q_i=q_i(\mu,\alpha),\quad p_i=p_i(\mu,\alpha),\quad t=t(\mu,\alpha) \tag{17}$$

$$(i=1, \cdots, n; 0 \leqslant \alpha \leqslant l);$$

这里，一定的 α 値对应于一定的正路（正路管的"母綫"），而参数 μ 的值则决定了这条正路上一定的点。

令 $\mu=\text{const}$，則在每条母綫上就得到一个点，而在管子上則得一封閉曲綫。我們认为积分式(12)中的 q_i，p_i 和 t 已用表达式(17)代入。于是，积分 I 便成为参数 μ 的函数，而且对于每一个固定的 μ 值，它都是沿相应的閉曲綫 $\mu=\text{const}$ 的曲綫积分。

根据积分 I 的不变性，我們有

$$dI=0.$$

这里字母 d 表示对参数 μ 积分。在积分号下取微分，即得

$$0=\oint \sum_{i=1}^{n}(dp_i\delta q_i+p_i d\delta q_i)-dH\,\delta t-H d\delta t.$$

将 $d\delta q_i$ 和 $d\delta t$ 改写成 δdq_i 和 δdt，并沿閉迴路进行分部积分，則得[①]：

$$0=\oint \sum_{i=1}^{n}(dp_i\delta q_i-\delta p_i dq_i)-dH\,\delta t+\delta H\,dt=$$

$$=\oint \sum_{i=1}^{n}\left[\left(dp_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}dt\right)\delta q_i+\left(-dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right)\delta p_i\right]+$$

$$+\left(-dH+\frac{\partial H}{\partial t}dt\right)\delta t$$

或者，根据(15)式，将上式逐項除以 $d\mu=\dfrac{dt}{\pi}$：

$$0=\oint\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(P_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\left(-Q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]+\right.$$

---

① 运算 d 和运算 δ 的手續是可以交换的，因为它們是对各不相同的独立变量 μ 和 α 取微分的。此外，当进行分部积分时，由于积分路徑的始末两点重合，所以被积出的部分等于零。因此，对于任何两个函数 u 和 v，当取其沿封閉迴路的积分时恒有 $\oint u\delta v=-\oint v\delta u$。

$$+\left(-\frac{dH}{dt}+\frac{\partial H}{\partial t}\right)\delta t\Big\}\pi. \tag{18}$$

积分号下的表达式，对于任意的因子 π 都应当是全微分*，而这只有当大括弧中的表达式等于零才可能。令此表达式等于零，我們便得到:

$$P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad Q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\ (i=1,\cdots,n),$$

此即所需证者①。

由前面的論证可知，龐伽雷—卡当积分的不变性可以作为力学的基本原理，因为由这个不变性可以推出：系統的运动由哈密頓正則方程所規定。

注. 在证明中，我們曾引入了一个輔助变量 μ，并利用了由曲綫族 $\mu=$ $=$const 中的一条轉到其中另一条时积分 I 的值保持不变的性质。由于函数 $\pi(t,q_i,p_i)$ 的任意性，曲綫族 $\mu=$const 实际上是包圍給定正路管的、不相交的任意閉曲綫族。如果不引进参数 μ，而就以时間 t 作参数，那么，重复同样的論述，我們就只是部分地利用了积分 I 的不变性(即对于由同一时刻的状态所組成的曲綫 $t=$const，积分 I 的不变性)而不能得到所需要的結果。

我們現在来比較仔細地討論一下龐伽雷—卡当积分的結构。

在龐伽雷—卡当积分(12)里，时間 t 和坐标 q_i 具有同等地位，而量 $-H$(能量冠以負号)則起着相应冲量的作用。这是一个极其深刻的类比。

現在引入一个新的变量 z 对积分 I 施行变量变换；这个新变量和原变量之間有如下关系:

$$z=-H(t,q_i,p_i). \tag{19}$$

由此关系解出 p_1:

---

* 因为(18)式中的积分迴路是任意的——譯者注。

① 我們还得到了恒等式 $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$，它是哈密頓正則方程的推論[見第 70 頁上的等式(20)]。

$$p_1 = -K(t, q_1, \cdots, q_n, z, p_2, \cdots, p_n), \tag{20}$$

則基本积分 I 在新变量之下可以写成:

$$I = \oint z\delta t + p_2\delta q_2 + \cdots + p_n\delta q_n - K\delta q_1. \tag{21}$$

于是，在新变量之下，积分 I 仍然具有龐伽雷—卡当积分的形式，只不过現在起时間作用的是变量 q_1，而代替以前的能量 H 的則是带有負号的冲量 p_1，即 K。因此，根据以前的证明，在新变量之下，系統的运动应由如下的哈密頓微分方程組来描述:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dt}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial t}, \\ &\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j=2, \cdots, n). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

这里，q_1 是独立变量。

我們以綫性振子为例来說明上述問題。对于綫性振子,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}.$$

我們取 q 作独立变量来建立正則方程。为此，令

$$z = -\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}\right),$$

由此解出

$$p = \sqrt{m}\sqrt{-2z - cq^2}.$$

于是，在所給情况下,

$$K = -\sqrt{m}\sqrt{-2z - cq^2}.$$

相应的正則方程(22)可以写成:

$$\frac{dt}{dq} = \sqrt{\frac{m}{c}}\frac{1}{\sqrt{-2\frac{z}{c} - q^2}}, \qquad \frac{dz}{dq} = 0.$$

由第二个方程得 $z = \text{const} = -h$。积分第一个方程求得 t:

$$\omega t = \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2h}{c} - q^2}} - \alpha,$$

其中 $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$，而 α 是任意常数。上式也可以写成

$$\omega t+\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{c}{2h}}q,$$

即

$$q=A\sin(\omega t+\alpha)\left(A=\sqrt{\frac{2h}{c}}\right).$$

§ 19. 基本积分不变量的流体动力学解釋·湯姆孙和亥姆霍兹关于环量和涡量的定理

为了具体說明积分不变量的概念，我們来看在具有势 $\Pi(t, x, y, z)$ 的外力作用下，理想流体的运动。根据流体动力学① 我們知道，这种流体质点的运动方程有如下形式.

$$a=-\text{grad}\Pi-\frac{1}{\rho}\text{grad}p, \tag{1}$$

式中 a 是质点的加速度，ρ 和 p 是它的密度和压力，而 Π 乃是单位质量的势。

設 ρ 和 p 之間有函数关系 $\rho=f(p)$（这种关系特别是在等温流动过程中成立)。于是，当令

$$\tilde{\Pi}=\Pi+\int\frac{dp}{\rho}$$

时，方程(1)便可以写成

$$a=-\text{grad}\tilde{\Pi}. \tag{1'}$$

上式表明流体质点的运动和质量为 $m=1$ 的质点在势場 $\tilde{\Pi}=\tilde{\Pi}(t, x, y, z)$ 中的运动是一样的。因此，对于流体质点的运动，龐伽雷—卡当积分也是积分不变量，它在給定情况下有如下形式:

$$I=\oint u\delta x+v\delta y+w\delta z-E\delta t, \tag{2}$$

其中 u, v, w 是流体质点的速度分量 [它在所給情况($m=1$)下就是冲量 p_i]，E 是能量，由下式决定:

$$E=\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+\tilde{\Pi}(t, x, y, z). \tag{3}$$

因此，在七維空間(t, x, y, z, u, v, w)里，沿任意封閉迴路所取的积分(2),

① 見，例如，柯欽、吉别里、劳澤著"理論流体力学"，第一卷，第一分册，第 41 頁，曹俊等譯，高等教育出版社出版，1956。

当迴路上的点按照流体运动而作任何移动时，都将保持其値不变。根据公式(1′)，流体运动应适合如下的一組微分方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w,\\&\frac{du}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial x},\quad \frac{dv}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial y},\quad \frac{dw}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

在我們所討論的特殊情况下，方程(4)就是哈密頓正則方程。

如果給出了一个具体的流体运动，它的速度場已知，即函数 $u(t,x,y,z)$，$v(t,x,y,z)$，$w(t,x,y,z)$ 是已知的，則积分(2)就可以看作是增广坐标空間(四維空間 t,x,y,z)中的积分。当使积分迴路沿流体质点的运动路徑作任意移动时，这个积分的値是不变的，即积分

$$\oint_C u(t,x,y,z)dx+v(t,x,y,z)dy+w(t,x,y,z)dz-E(t,x,y,z)dt \quad (5)$$

是关于具有給定速度場的流体运动在增广坐标空間中的积分不变量。

当以同一时刻($t=\mathrm{const}$)的状态組成积分迴路时，积分(2)便具有

$$\oint_C u\delta x+v\delta y+w\delta z \qquad (6)$$

的形式。

在流体动力学里，这个积分叫做沿迴路 C 的速度环量。于是，我們順便得到了**关于速度环量守恒的湯姆孙定理**：在时刻 t_1 組成积分迴路的流体质点轉移到它們在任意的另一时刻 t_2 所占据的位置时，环量(6)保持其値不变。

如果某些流体质点在某一时刻組成一条綫，则同样的这些质点，在另一时刻仍然組成一条綫。往后我們将用到随时間而移动的、变形的"流体綫"以及相类似的"流体面"等概念。

由环量守恒定理可以断定，每一个封閉的流体綫都和一定的环量相对应。

我們注意，根据司托克斯公式①，积分(6)可以写成沿曲面 S(由迴路 C 所圍成的曲面)的积分形式：

---

① 見，例如，Фихтенгольц Г.М.，Основы математического анализа，М.，1956，т.2，гл，22，§4.（或微积分学教程，第三卷，第二分册，第十七章，第614节；吳亲仁等譯，人民教育出版社。——譯者）

$$\iint_S \xi\delta y\delta z+\eta\delta z\delta x+\zeta\delta x\delta y, \tag{7}$$

其中

$$\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{8}$$

是某一矢量 Ω 的分量，这矢量叫做速度渦量(旋度)或簡称渦量。积分(7)常写成

$$\iint_S \Omega_n dS \tag{7'}$$

的形式，其中 Ω_n 是矢量 Ω 在曲面法綫方向的投影，dS 为曲面 S 的元面积。由此可見，积分(7)給出了通过曲面 S 的渦流量。由速度环量守恒定理立即可得**渦流守恒定理**：每一有界流体面都和穿过此面一定的渦流量相对应①。

具有給定速度場的流体运动决定于微分方程組：

$$\frac{dx}{dt}=u(t,x,y,z),\quad \frac{dy}{dt}=v(t,x,y,z),\quad \frac{dz}{dt}=w(t,x,y,z). \tag{9}$$

对于方程組(9)的积分曲綫而言，积分(5)是积分不变量。

現在我們提出这样一个問題：除方程組(9)而外，还有那些形式为

$$\frac{dx}{P(t,x,y,z)}=\frac{dy}{Q(t,x,y,z)}=\frac{dz}{R(t,x,y,z)}=\frac{dt}{U(t,x,y,z)} \tag{10}$$

的微分方程組具有这一性质？也就是說，还有那些方程組具有积分(5)这样的积分不变量？

为了回答这个問題，我們在方程組(10)的积分曲綫上引进一个参数 μ，同时，像在前一节中所做的那样，令(10)式的比值等于乘积 $\pi(t,x,y,z)d\mu$，这里的 π 是任意函数。我們来看方程組(10)的积分曲綫管和包圍这管子的封閉迴路 C，对于这迴路 $\mu=\text{const}=c$。注意，沿迴路 C，积分(5)的值和值 $\mu=c$ 无关。

以字母 d 表示对 μ 的微分，并重复第98頁上的推导，則由公式(8)便得到：

$$0=d\oint u\delta x+v\delta y+w\delta z-E\delta t=$$

$$=\oint du\delta x+dv\delta y+dw\delta z-dE\delta t-\delta u dx-\delta v dy-\delta w dz+$$

---

① 由此可見，特別是在理想流体的流体体积中，渦量既不能消失，也不能产生(当然是在力有势，而且关系 $\rho=f(p)$ 成立的情况下)。

$$+\delta E dt=\oint\left[-\zeta dy+\eta dz+\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}\right)dt\right]\delta x+[\ *\ ]\delta y+$$

$$+[\ *\ ]\delta z+\left[-dE-\frac{\partial u}{\partial t}dx-\frac{\partial v}{\partial t}dy-\frac{\partial w}{\partial t}dz+\frac{\partial E}{\partial t}dt\right]\delta t,$$

式中 δy 和 δz 的系数可由 δx 的系数經字母作循环置换后而得到。

将 dx, dy, dz, dt 分别用(10)式的相应分母和 $\pi(t, x, y, z)d\mu$ 的乘积来代替，則因积分号下的表达式对于任意选取的函数 $\pi(t, x, y, z)$ 都是全微分，所以它应当恒等于零。因之，方括弧中的表达式（将其中的四个微分 dx, dy, dz, dt 分别以与其成比例的量 P, Q, R, U 代替之后）等于零，即如下的等式成立，

$$\left.\begin{aligned}\eta R-\zeta Q+\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}\right)U=0,\\ \zeta P-\xi R+\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial y}\right)U=0,\\ \xi Q-\eta P+\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial z}\right)U=0,\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}\right)P+\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial y}\right)Q+\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial z}\right)R=0.\tag{12}$$

当 $U\neq 0$ 时关系式(12)是等式(11)的推論，而当 $U=0$ 时(12)则是(11)和(1′)的推論*。

---

* 由(1′)的第一个投影式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

便有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-\frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial x}.$$

利用(8)式可将它写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}=v\zeta-w\eta$$

的形式。同理可得：

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial y}=w\xi-u\zeta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial z}=u\eta-v\xi.$$

于是，当 $U=0$ 时，利用(11)式便有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}\right)P+\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial y}\right)Q+\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial z}\right)R=\\ &=(v\zeta-w\eta)P+(w\xi-u\zeta)Q+(u\eta-v\xi)R=\\ &=u(\eta R-\zeta Q)+v(\zeta P-\xi R)+w(\xi Q-\eta P)=0.\end{aligned}$$

——譯者注

等式(11)和方程(10)一起决定了所有那些以积分(5)为其积分不变量的微分方程組。我們来找其中 $U=0$(即 $dt=0$) 的那些組。此时，由(11)式便有:

$$\frac{P}{\xi}=\frac{Q}{\eta}=\frac{R}{\zeta},$$

且方程組(10)具有如下形式:

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dz}{\zeta}=\frac{dt}{0}. \tag{13}$$

方程組(13)的积分曲綫叫做渦綫。

因此，渦綫的微分方程組是唯一的一組以积分(5)为其积分不变量，同时又有 $dt=0$ 的方程①。

由此結論可以得出一个重要推論。

在空間 (x, y, z, t) 中取任意一根渦綫管和圍繞这根管子的两条迴路 C_1 和 C_2(图 34)。根据积分(5)对于渦綫的不变性我們便有

$$\oint_{C_1} u\delta x+v\delta y+w\delta z-E\delta t=\oint_{C_2} u\delta x+v\delta y+w\delta z-E\delta t.$$

現在任意給定一个数 $\tau>0$, 将空間(x, y, z, t)的每一点都由其原来位置移到$(x', y', z', t+\tau)$处; 这里 x', y', z' 是在时刻 t 坐标为 x, y, z 的流体质点于时刻 $t+\tau$ 时所占据位置的坐标。在这样的移动之下，渦綫就沿着流体质点的軌迹轉变为某一条新的綫，我們将这条新綫叫做"移位綫"。而原来的渦綫管則轉变为移位綫管，迴路 C_1 和 C_2 則变成迴路 D_1 和 D_2 (見图 34)②。但这样的移动是借流体质点的运动来实現的，所以在移动时积分(5)不改变自己的値，即

$$\oint_{C_1}=\oint_{D_1},\quad \oint_{C_2}=\oint_{D_2}.$$

因之，有

$$\oint_{D_1}=\oint_{D_2}. \tag{14}$$

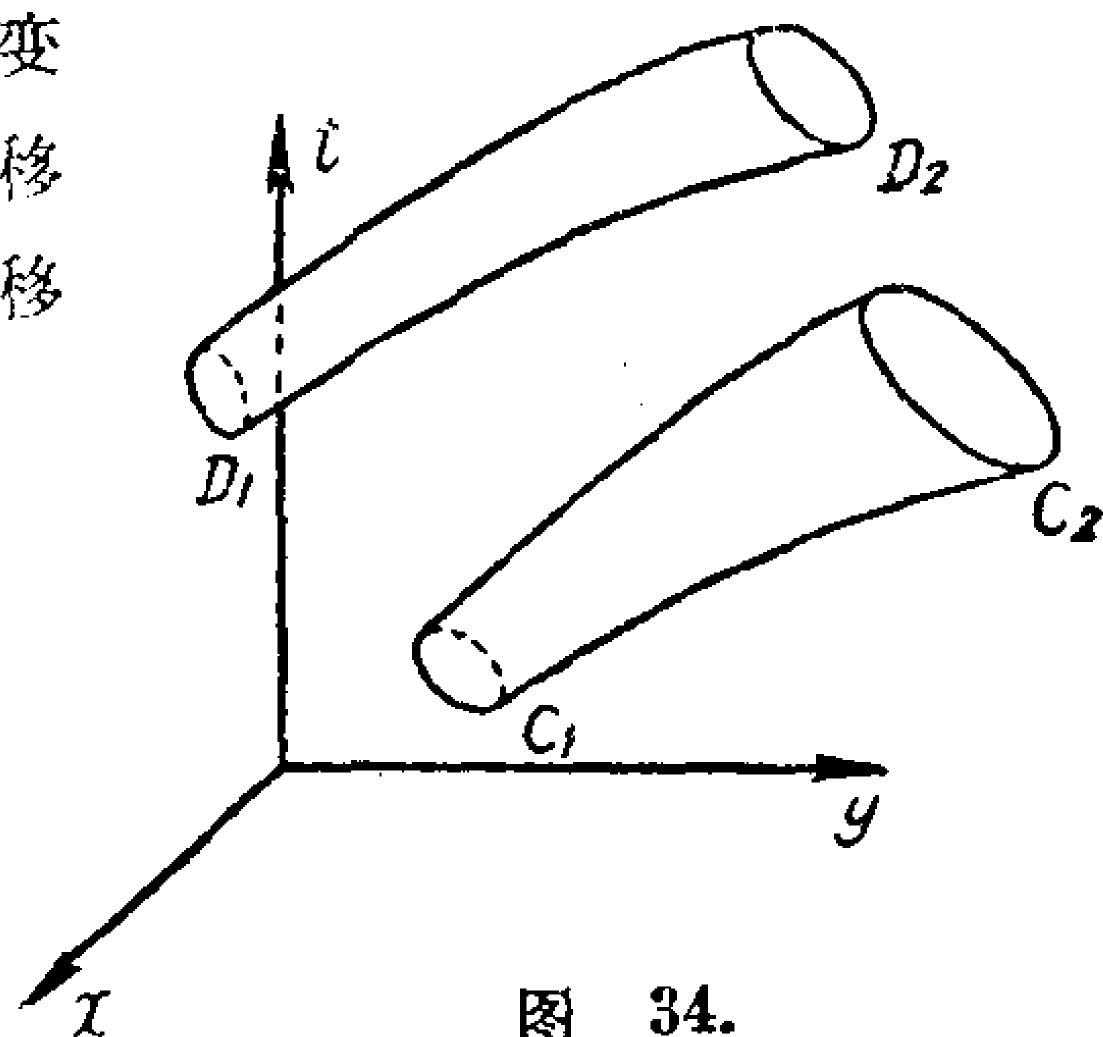


图 34.

① 积分(5)也是那些 $dt\neq 0$ 的其他方程組[例如方程組(9)]的积分不变量。

② 我們这里所討論的渦綫管是位于四維空間(x, y, z, t)里的，但在图 34 上并未划出 z 軸。

D_1 和 D_2 可以看作是包圍移位綫管的任意两条迴路。因此，等式(14)表明积分(5)对于"移位綫"是不变量。同时，沿每条移位綫如同沿渦綫一样，也有 $dt=0$。因之，移位綫具有前所指出的仅为渦綫才可能具有的那种性质。这也就是說，移位綫是渦綫。同时，由于移动的时間 τ 是任意的。所以当构成渦綫的流体质点运动时，渦綫永远保持为渦綫。

由此我們得到**亥姆霍兹定理**，这定理可以这样来表述：渦綫是流体綫。

順便还得到如下結論：每根渦管都有一定的"强度"，这个"强度"由积分

$$\oint_{\sigma} u\delta x+v\delta y+w\delta z-E\delta t \tag{15}$$

来决定。

当流体运动时，这个强度的大小是不变的。当取同一时刻 $t(\delta t=0)$ 的渦綫管时，强度(15)就是沿迴路 C 的速度环量：

$$\oint_{C} u\delta x+v\delta y+w\delta z.$$

§20. 广义保守系統·惠特克方程·雅科毕方程·莫培督—拉格朗日最小作用量原理

我們来考察广义保守系統，即函数 H 不显含时間 t 的任意系統(也可能是非自然系統)。这种系統有广义能量积分

$$H(q_i, p_i)=h. \tag{1}$$

这个积分和当 q_1 是循环坐标——$\frac{\partial H}{\partial q_1}=0$ 时所出現的冲量守恒积分 $p_1=c$ 是类似的。

鉴于时間变量 t 和循环坐标之間的这种类似性，可以期望利用能量积分(1)使运动微分方程的阶数降低二阶。

为此目的，我們来看普通的（非增广的）$2n$ 維相空間；q_i，p_i $(i=1, \cdots, n)$是这空間中点的坐标。我們仅限于討論相空間里那样一些点，它們的坐标滿足常数 h 有固定值的方程(1)。換句話說，我們只限于討論总能量 H 等于給定値 h 的那些系統状态。

此时，由于按等式(1)有：

$$\oint H\,\delta t = h\oint \delta t = 0,$$

故基本积分不变量 I 可以写成

$$I = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i \tag{2}$$

的形式。

現在将冲量中的某一个，譬如 p_1，从方程(1)中解出来：

$$p_1 = -K(q_1, \cdots, q_n, p_2, \cdots, p_n, h). \tag{3}$$

将解得之表达式代入积分(2)中的 p_1，我們便得到

$$I = \oint \sum_{j=2}^{n} p_j\,\delta q_j - K\,\delta q_1. \tag{4}$$

如果将 q_j 和 $p_j(j=2, \cdots, n)$ 看作基本坐标和冲量，而将变量 q_1 看作起着时間作用的变量(代替函数 H 的有函数 K)，則积分不变量(4)仍然具有龐伽雷—卡当积分的形式。因之，系統的运动应当满足如下的 $2n-2$ 阶的哈密頓微分方程組(見 §18)：

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j}\quad (j=2, \cdots, n). \tag{5}$$

这組方程曾由惠特克得到，被称为惠特克方程。

将惠特克方程組积分之，我們便得到以变量 q_1 和任意常数 h, $c_1, \cdots, c_{2n-2}$ 的函数形式表出的量 q_j 和 $p_j(j=2, \cdots, n)$：

$$q_j = \varphi_j(q_1, h, c_1, \cdots, c_{2n-2}),\ p_j = \psi_j(q_1, h, c_1, \cdots, c_{2n-2})$$
$$(j=2, \cdots, n). \tag{6}$$

再将所得之表达式(6)代入公式(3)，便得到 p_1 的类似表达式：

$$p_1 = \psi_1(q_1, h, c_1, \cdots, c_{2n-2}). \tag{6'}$$

这样，相空間中的所有軌道(即运动的几何图象)都完全被确定了。

坐标和时間 t 之間的关系可由方程 $\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$ 用求积法得到：

$$t=\int\frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}+c_{2n-1};\tag{7}$$

这里，偏导数$\dfrac{\partial H}{\partial p_1}$中的一切变量都要按等式(6)和(6′)以$q_1$表出。

哈密頓型的惠特克方程組(5)可以用和它等价的拉格朗日型方程組

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial q'_j}-\frac{\partial P}{\partial q_j}=0\quad(j=2,\cdots,n)\tag{8}$$

来代替，其中$q'_j=\dfrac{dq_j}{dq_1}$，而类似于拉格朗日函数的函数P和类似于哈密頓函数的函数K则以如下等式相联系[①]:

$$P=P(q_1,\cdots,q_n,q'_2,\cdots,q'_n)=\sum_{j=2}^{n}p_jq'_j-K.\tag{9}$$

在这关系式的最后部分，冲量p_j应当以其通过

$$q'_2=\frac{dq_2}{dq_1},\quad\cdots,\quad q'_n=\frac{dq_n}{dq_1}$$

表出的表达式来代替，而这些表达式可以从(5)式的前$n-1$个方程得到。

現在从等式(3)和(9)出发，把函数P的表达式改写成如下形式:

$$P=\sum_{j=2}^{n}p_jq'_j+p_1=\frac{1}{\dot q_1}\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i=\frac{1}{\dot q_1}(L+H).\tag{10}$$

在自然系統(即通常的保守系統)的情况下，$L=T-\Pi$，$H==T+\Pi$；因而，

$$P=\frac{1}{\dot q_1}(L+H)=\frac{2T}{\dot q_1},\tag{11}$$

而且动能T可以写成

① 見第67頁上的等式(8)。

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k=\dot{q}_1^2G(q_1,\cdots,q_n,q_2',\cdots,q_n') \tag{12}$$

的形式，其中

$$G(q_1,\cdots,q_n,q_2',\cdots,q_n')=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}q_i'q_k' \quad (q_1'=1). \tag{13}$$

由等式(1)和(12)得

$$\dot{q}_1=\sqrt{\frac{h-\Pi}{G}}, \tag{14}$$

于是函数P就可以写成如下形式:

$$P=\frac{2T}{\dot{q}_1}=2\sqrt{G(h-\Pi)}. \tag{15}$$

当函数P取(15)式的形式时，微分方程(8)称为雅科毕方程[①]。

将雅科毕方程积分之，我們便得到坐标空間$(q_1, \cdots, q_n)$中的全部軌道:

$$q_j=\varphi_j(q_1,h,c_1,\cdots,c_{2n-2}). \tag{16}$$

坐标和时間变量之間的联系可借求积方法由关系式(14)得到:

$$t=\int\sqrt{\frac{G}{h-\Pi}}dq_1+c_{2n-1}. \tag{17}$$

我們現在轉来建立莫培督—拉格朗日最小作用量原理。由于方程(8)是拉格朗日型的，所以由它可以导出变分原理，按这原理，对于正路应当有

$$\delta W^*=0, \tag{18}$$

式中

$$W^*=\int_{q_1^0}^{q_1^1}Pdq_1 \tag{19}$$

---

① 这組方程是由德国数学家 K. 雅科毕导出的，曾发表在他的經典性著作——“动力学讲义”一书中；該书出版于 1886 年(有俄譯本，ГОНТИ, 1936)。在非自然的广义保守系統的情况下，雅科毕方程里的函数P由公式(9)来确定。

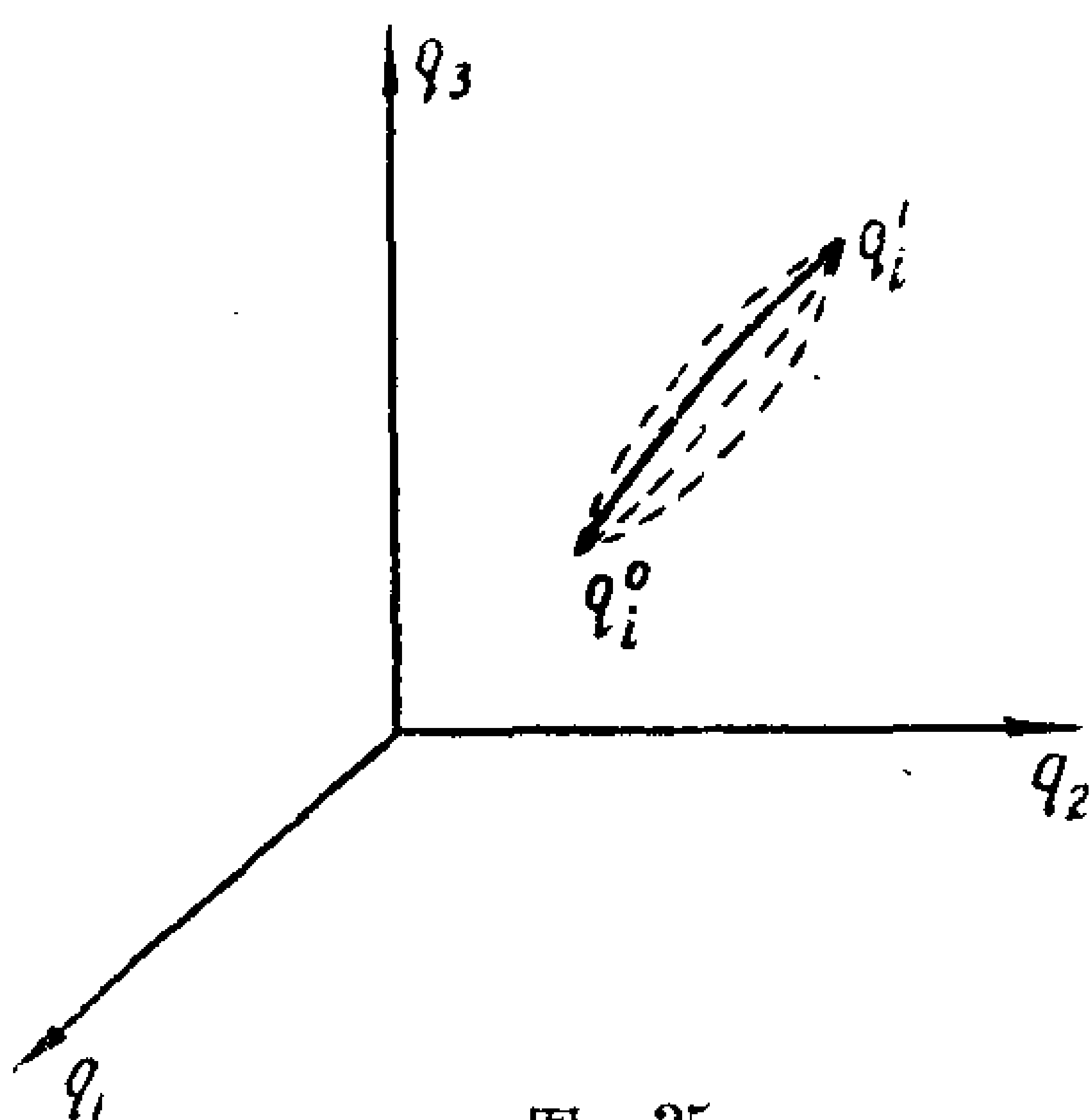


图 35.

叫做拉格朗日作用量。这里进行比較的是广义保守系統的所有这样一些运动：它們的总能量有同一的值 h，而且在这样的运动中，系統由给定的初始位置 q_i^0 轉移到給定的末了位置 q_i^1 (图.35)。但时刻 t_0 和 t_1 却不是固定的，当由正路轉到旁路时它們可能都有变更①。

利用等式(10)来表示积分(19)的函数 P，我們便得到拉格朗日作用量 W^* 和哈密頓作用量 W 之間的关系：

$$W^*=\int_{t_0}^{t_1}(L+H)dt=\int_{t_0}^{t_1}Ldt+h\int_{t_0}^{t_1}dt=W+h(t_1-t_0). \tag{20}$$

在普通保守系統的情况下，可以利用表达式(11)将拉格朗日作用量写成如下形式：

$$W^*=2\int_{t_0}^{t_1}Tdt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu v_\nu^2dt=\sum_{\nu=1}^{N}\int_{s_\nu^0}^{s_\nu^1}m_\nu v_\nu ds_\nu. \tag{21}$$

上面得到的这个 W^* 的表达式表明：拉格朗日作用量 W^* 等于系統各质点的动量矢量沿系統相应位移所作之功。

变分原理(18)称为莫培督-拉格朗日最小作用量原理②。

作为一个例子，我們拿費馬的光学原理和莫培督-拉格朗日最小作用量

① 等式(18)表明拉格朗日作用量沿正路有逗留值。解决作用量 W^* 沿正路有最小值的問題完全和哈密頓原理一样，也要引入动焦点。有关这个問題更詳尽的討論見 Суслов Г.К., Теоретическая механика, § 248。

② 这个原理最先是由莫培督于 1747 年以比較含糊的措詞提出的。原理严格的表述和論証是由拉格朗日于 1760 年給出的。

原理来比較一下①。

根据費馬原理，光綫在非均匀介质中的傳播，是按着使其通过时間

$$t=\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{v} \tag{22}$$

取极小値的路徑行进的。

当在介质中的每一点上都引进一个折射系数 $n=\frac{c}{v}$（眞空里的光速 c 和給定介质中的光速 v 之比）时，(22)式就可以写成

$$t=\frac{1}{c}\int_{s_0}^{s}nds$$

的形式，其中 n 是介质各点的函数。于是，費馬原理可以写成

$$\delta\int_{s_0}^{s}nds=0. \tag{23}$$

另一方面，对于质量为 m 的一个质点而言，由于 $\frac{1}{2}mv^2+\Pi=h$，故由莫培督-拉格朗日原理便有

$$\delta\int_{s_0}^{s}mv\,ds=\sqrt{m}\,\delta\int_{s_0}^{s}\sqrt{2(h-\Pi)}ds=0. \tag{24}$$

由公式(23)和(24)可見，当

$$\Pi=h-\frac{1}{2}n^2 \tag{25}$$

时，光綫的軌道和质点的軌道完全一样。

如果将地面附近的折射指数 n 取作随高度 z 而减小的綫性函数：

$$n=n_0\left(1-k\frac{z}{H}\right), \tag{26}$$

其中 H 是大气层高度，則当略去与 $\left(\frac{z}{H}\right)^2$ 同阶的小量之后，即得

$$\Pi=h-\frac{1}{2}n_0^2\left(1-2k\frac{z}{H}\right)=c+gz, \tag{27}$$

其中

$$c=h-\frac{1}{2}n_0^2,\quad g=\frac{kn_0^2}{H}. \tag{28}$$

---

① 見，例如，Розе Н.В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Л., 1938, 93-94頁。

公式(27)决定了近地面处随 z 值变化的重力之势。

因此，当折射指数 n 按上述方式随高度变化时，光綫将沿着以鉛垂綫为軸的抛物綫傳播。

§21. 慣性运动·保守系統的任意运动与測地綫的关系

假設給定了一个任意的平稳系統，它的动能等于

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(q_1,\cdots,q_n)\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{1}$$

若以如下的正定二次(微分)型所定义的平方弧长 ds^2 作为坐标空間 $(q_1,\cdots,q_n)$ 的度量：

$$ds^2=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(q_1,\cdots,q_n)dq_idq_k, \tag{2}$$

則联結坐标空間中两点 (q_i^0) 和 (q_i) 的曲綫弧長可由等式

$$s=\int_{(q_i^0)}^{(q_i)}ds=\int_{(q_i^0)}^{(q_i)}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}dq_idq_k} \tag{3}$$

来确定。

将公式(1)和(2)加以比較，便得到系統运动时的动能

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{4}$$

即在度量(2)之下，系統的动能永远和 n 維坐标空間中"表示点"的动能相同，只要认为这个点的质量 $m=1$。

我們現在来看系統的慣性运动 ($\Pi=0$ 的情况)。在这种运动中，表示点的一切可能軌道都叫做[关于度量(2)的]測地綫。按公式(4)，由能量积分

$$T=h$$

得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2h}, \tag{5}$$

即与慣性运动(以及动能为常数 h 的任何运动)相对应的是坐标空間 $(q_1,\cdots,q_n)$ 中表示点的勻速运动，其速度为 $\sqrt{2h}$。

按最小作用量原理，測地綫乃是变分問題

$$\delta W^*=0 \tag{6}$$

的极値曲綫①，这里的 W^* 是拉格朗日作用量。但在所討論的情况下，无論是正路还是旁路，它們都有 h 为固定値的能量积分 $T=h$。因此，

$$W^*=\int_{t_0}^{t} 2T dt = 2h(t-t_0)=\sqrt{2h}\, s, \tag{7}$$

其中 $s=\sqrt{2h}(t-t_0)$ 是坐标空間 $(q_1, \cdots, q_n)$ 中曲綫的长度。

变分問題(6)取如下形式:

$$\delta s=\delta\int_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dq_i dq_k}=0. \tag{8}$$

因此，測地綫的标志是：和其它与測地綫有共同端点的曲綫②相比較，測地綫的弧长有极値(确切地說，是逗留値)(見第 110 頁上的图 35)。

在拉格朗日作用量沿正路有极小値的情况下，測地綫的弧长小于和測地綫有共同端点的任何其他曲綫的弧长③。

因此，測地綫也叫做空間的短程綫。

現在来看保守系統，即具有不显含时間 t 的势能 $\Pi=\Pi(q_1, \cdots, q_n)$ 的平稳系統。在这情况下，按前节的公式(15)和(19)則有

$$W^*=2\int_{q_1^0}^{q_1} \sqrt{G(h-\Pi)}\, dq_1 = 2\int_{q_i^0}^{q_i} \sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dq_i dq_k}. \tag{9}$$

因此，保守系統具有給定总能量値 h 的运动，在坐标空間里，是沿着变分問題的极値曲綫(具有固定端点的):

$$\delta\int_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dq_i dq_k}=0 \tag{10}$$

而实現的。

从公式(10)和公式(8)的比較中可以見出，对于保守系統而言，正路軌道乃是以

---

① 即 W^* 取逗留値的那些曲綫。

② 在莫培督-拉格朗日原理中，对于正路和旁路所要求的"等能量性"并沒有对坐标空間中的比較曲綫加上任何限制；这个要求仅仅限制了表示点的速度罢了。

③ 当測地綫的两端充分接近时，这結論总是对的。

$$ds_1^2=(h-H)\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}dq_idq_k \tag{11}$$

为度量的空間的測地綫。

§22. 龐伽雷通用积分不变量·李华中定理

現在我們来看沿着由系統在同一时刻的状态所組成的迴路 C 的积分 $I=\oint\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t$。以超平面 $t=\text{const}$ 割截正路管时（見第 95 頁上的图 33），便得到这样的迴路。对于这样的迴路 $\delta t=0$，因而基本积分不变量取如下形式：

$$I_1=\oint\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i. \tag{1}$$

这个积分最先是由龐伽雷提出的。以后卡当在引进了一个补充項 $-H\delta t$ 之后，又将这个积分推广到由系統的非同时状态所組成的迴路上。

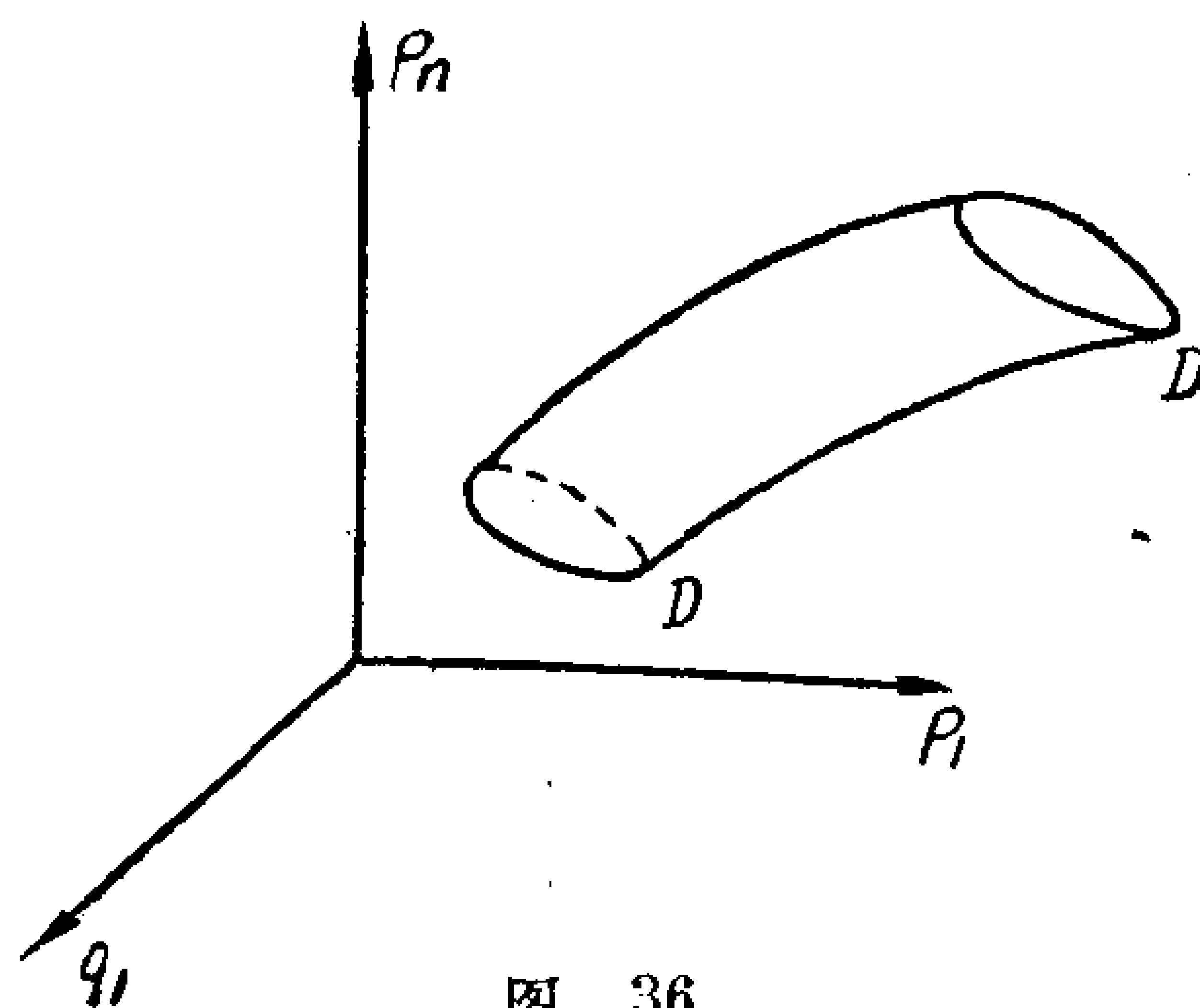


图 36.

当迴路 C 沿正路管轉移到仍然是由同一时刻的状态所組成的另一迴路 C' 时，龐伽雷积分不变量 I_1 保持其值不变。在普通的（即非增广的）$2n$ 維相空間 $(q_1, p_1, \cdots, q_n, p_n)$ 中来討論积分 I_1 是很方便的。在这个空間里，和迴路 C 及 C'（图 33）相对应的則是包圍着"正"軌道管的迴路 D 和 D'（图 36）；同时

$$\oint_D\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i=\oint_{D'}\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i.$$

我們注意，迴路D和D'中有一个，例如D，是可以完全任意选取的。可以认为迴路D上的各点乃是系統在同一时刻t的不同状态；而系統在时刻t'的相应状态則构成迴路D'。

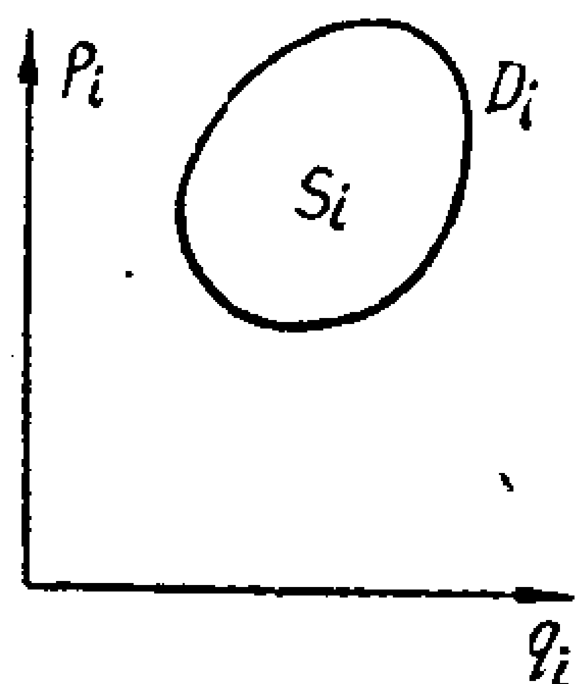


图 37.

代替相空間，我們分别来看n个相平面(q_i, p_i) $(i=1, \cdots, n)$。将相空間中任意的封閉迴路D投影在这些平面上(图 37)，則得迴路$D_i(i==1, \cdots, n)$。对于任何i我們都有

$$\oint_D p_i \delta q_i = \oint_{D_i} p_i \delta q_i = \pm S_i \quad (i=1, \cdots, n), \tag{2}$$

其中S_i是迴路D_i在平面(q_i, p_i)上所包圍的面积$(i=1, \cdots, n)$。迴路D的环繞方向决定了在投影D_i上的环繞方向。公式(2)中S_i前面的正負号是这样定的：若环繞迴路D_i的方向是順时針的(即p_i軸到q_i軸的最小轉角方向)，就取正号，反之，就取負号。

于是，

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \pm S_i. \tag{3}$$

因之，当系統运动时，迴路D和D_i都在改变，面积S_i也随之而变，但这些面积的代数和(3)却是不变的。这就是龐伽雷积分不变性的几何意义。

在I_1的表达式中不出現H。因此，龐伽雷积分I_1对于任何哈密頓方程組都是不变量。因之，积分I_1叫做通用积分不变量。

不难证明如下的論断：

若积分I_1是某微分方程組

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_k, p_k), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_k, p_k) \tag{4}$$

$$(i=1, \cdots, n)$$

的不变量，則方程組(4)是哈密頓型的。

事实上，在此情况下，有

$$0=\frac{d}{dt}I_1=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i+p_i\frac{d}{dt}\delta q_i\right)=$$

$$=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i+p_i\delta\frac{dq_i}{dt}\right)=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i-\frac{dq_i}{dt}\delta p_i\right)=$$

$$=\oint\sum_{i=1}^{n}(P_i\delta q_i-Q_i\delta p_i).$$

由此可知，积分号下的表达式必定是某个函数 $-H(t,q_k,p_k)$ 的虚全微分[①]：

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i\delta q_i-Q_i\delta p_i)=-\delta H(t,q_k,p_k),$$

即

$$Q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \ P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ \ (i=1,\cdots,n).$$

这就是所要证的。

我們再介紹几个名詞：龐伽雷-卡当积分 I 和龐伽雷积分 I_1 都叫做一阶相对积分不变量。“相对”一詞是指积分区域是一条封閉迴路；而一阶乃指在积分号下的表达式中，微分的出現是綫性的。应当注意，利用司托克斯公式可将一阶相对积分不变量 I_1 写成二阶絕对积分不变量的形式：

$$\oint_{(D)}\sum_{i=1}^{n}A_i\delta x_i=\iint_S\sum_{i<k}^{1\cdots n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\delta x_i\delta x_k,\tag{5}$$

---

① 这里，$\delta H=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)$。(虚全微分的“虚”字是指将 t 固定的意思。——譯者注)

上式右端的积分展布在封閉迴路D所圍成的曲面S上。

将此公式用于积分I_1便得到:

$$I_1=\iint\sum_{i=1}^{n}\delta p_i\delta q_i.$$

已經知道,在$2n$維相空間中,存在着如下的奇数阶通用相对积分不变量I_{2k-1}和偶数阶通用絕对积分不变量J_{2k}:

$$I_1=\oint\sum p_i\delta q_i=J_2=\iint\sum\delta p_i\delta q_i,$$

$$I_3=\oint\!\!\!\oint\!\!\!\oint\sum p_i\delta q_i\delta p_k\delta q_k=J_4=\iiiint\sum\delta p_i\delta q_i\delta p_k\delta q_k,$$

....

$$J_{2n-1}=\oint\cdots\oint\sum p_{i_1}\delta q_{i_1}\cdots\delta p_{i_n}\delta q_{i_n}=J_{2n}=\int\cdots\int\delta p_{i_1}\delta q_{i_1}\cdots\delta p_{i_n}\delta q_{i_n}.$$

1947 年中国学者李华宗曾证明了这些通用积分不变量的唯一性。他指出,任何其他的通用积分不变量仅仅和上列积分之一相差一个常数因子①。

后面我們将要用到关于一阶积分不变量的李华中定理。

李华宗定理. 若

$$I'=\oint\sum_{i=1}^{n}[A_i(t,q_k,p_k)\delta q_i+B_i(t,q_k,p_k)\delta p_i]$$

是通用相对积分不变量,则

$$I'=cI_1, \tag{6}$$

这里c是常数,I_1是龐伽雷积分。

证明. 我們就$n=1$的情况来证明这个定理。設$I'=\oint A(t,q,p)\delta q+B(t,q,p)\delta p$是通用积分不变量。积分是沿相平面$(q,p)$上的封閉迴路取的。另外,还假設給定了任意一組哈密頓型的微分方程,它的哈密頓函数是$H(t,q,p)$,即:

---

① Hwa-Chung Lee, Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations, Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, ser. A, v. LXII, 1947, 237—247 頁。

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{7}$$

这組方程的通解有如下形式:

$$q=q(t,q_0,p_0),\quad p=p(t,q_0,p_0), \tag{8}$$

其中 q_0, p_0 是当 $t=t_0$ 时 q, p 的初值。

令

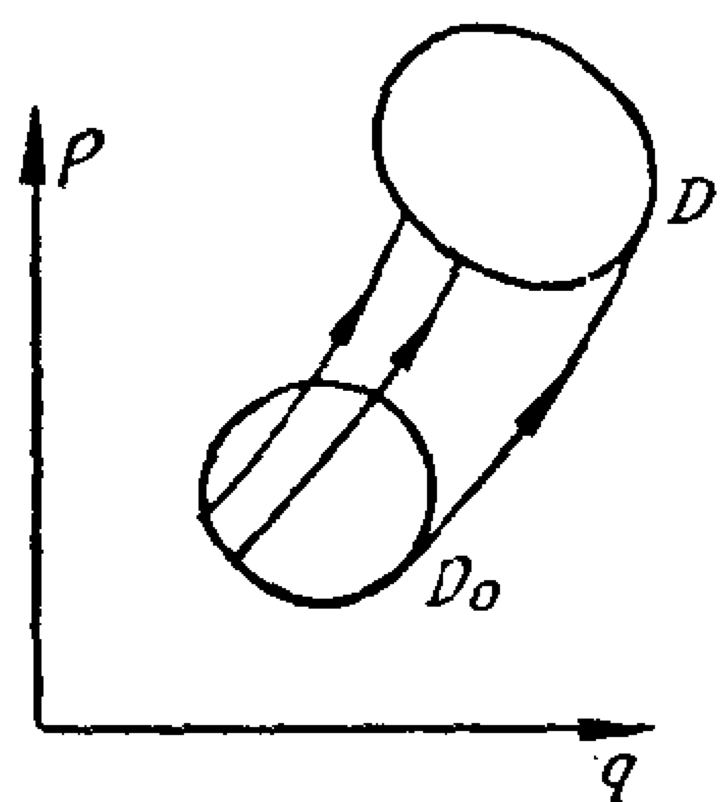


图 38.

$$q=q_0(\alpha),\quad p=p_0(\alpha) \tag{9}$$

$$[0\leqslant\alpha\leqslant l;\ q_0(0)=q_0(l),\ p_0(0)=p_0(l)]$$

表示相平面上閉迴路 D_0 的方程(图 38)。在时刻 $t=t_0$ 位于迴路 D_0 上的点，在任意的另一时刻 t 将組成迴路 D。将(8)式中的 q_0 和 p_0 以其表达式(9)来代替，我們便得到迴路 D 的参数方程:

$$q=q(t,\alpha),\quad p=p(t,\alpha)\quad (0\leqslant\alpha\leqslant l). \tag{10}$$

积分 I' 中的 q 和 p 用这些函数来代替之后，我們就得到了作为参数 t 的函数 I'。从 I' 的不变性可知 $\frac{dI'}{dt}=0$。在积分号下取微分，并作分部积分①，便得到

$$0=\frac{dI'}{dt}=\oint\frac{dA}{dt}\delta q+\frac{dB}{dt}\delta p+A\frac{d}{dt}\delta q+B\frac{d}{dt}\delta p=$$

$$=\oint\frac{dA}{dt}\delta q+\frac{dB}{dt}\delta p+A\delta\frac{dq}{dt}+B\delta\frac{dp}{dt}=$$

$$=\oint\frac{dA}{dt}\delta q-\delta A\frac{dq}{dt}+\frac{dB}{dt}\delta p-\delta B\frac{dp}{dt}=$$

$$=\oint\left[\left(\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)\frac{dp}{dt}+\frac{\partial A}{\partial t}\right]\delta q+$$

① 見第 98 頁的脚注①。在运算过程中，先使 $\delta A=\frac{\partial A}{\partial q}\delta q+\frac{\partial A}{\partial p}\delta p$，$\delta B=\frac{\partial B}{\partial q}\delta q+\frac{\partial B}{\partial p}\delta p$，而后再利用方程(7)。

$$+\left[\left(\frac{\partial B}{\partial q}-\frac{\partial A}{\partial p}\right)\frac{dq}{dt}+\frac{\partial B}{\partial t}\right]\delta p=$$

$$=\oint\left(-Z\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial A}{\partial t}\right)\delta q+\left(-Z\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\partial B}{\partial t}\right)\delta p,$$

其中

$$Z=\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}.$$

在看作参数的变量 t 取任何值的情况下，在任意的积分迴路上，上面的积分总是等于零的。因此，积分号下的表达式应当是变量 q 和 p 的全微分。因而有

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(-Z\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial A}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(-Z\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\partial B}{\partial t}\right).$$

上式稍經变换即可写作

$$-\frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial Z}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\partial Z}{\partial t}=0.$$

由于函数 H 可以完全任意地选取，所以

$$\frac{\partial Z}{\partial p}=\frac{\partial Z}{\partial q}=\frac{\partial Z}{\partial t}=0,$$

即

$$Z=\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}=\text{const}=c.$$

于是，我們有

$$\frac{\partial(A-cp)}{\partial p}=\frac{\partial B}{\partial q},$$

因之，必定有这样的函数 $\Phi(t,q,p)$ 存在，使得[①]

$$(A-cp)\delta q+B\delta p=\frac{\partial\Phi}{\partial q}\delta q+\frac{\partial\Phi}{\partial p}\delta p=\delta\Phi.$$

这样，我們便有

$$A\delta q+B\delta p=cp\delta q+\delta\Phi,$$

因而，

① 这里的 t 看作参数。

$$I' = \oint A\delta q + B\delta p = c\oint p\delta q = cI_1,$$

证毕。

当 $n>1$ 时，虽然证明本身变得比較复杂，但证明的思路仍然是这样。

§23. 相空間的体积不变性·刘維定理

我們来討論"完全"絕对积分不变量

$$J = \int\cdots\int \delta p_1 \delta q_1 \cdots \delta p_n \delta q_n. \tag{1}$$

这个积分的不变性表示出 $2n$ 維相空間中相体积的不变性；它可以按如下方式来建立。

将积分哈密頓方程所得到的有限运动方程写成

$$q_i = q_i(t, q_k^0, p_k^0), p_i = p_i(t, q_k^0, p_k^0) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{2}$$

的形式，其中 q_k^0、p_k^0 是当 $t = t_0$ 时 q_k, p_k 的初值($k = 1, \cdots, n$)。

根据公式(2)，由 $t = t_0$ 的初始状态所組成的任意体积 J_0，于时刻 t 将轉变为由相应状态所組成的体积 J。同时，

$$J = \underbrace{\int\cdots\int}_{J_0} \left| \frac{\partial(q_1, p_1, \cdots, q_n, p_n)}{\partial(q_1^0, p_1^0, \cdots, q_n^0, p_n^0)} \right| \delta q_1^0 \delta p_1^0 \cdots \delta q_n^0 \delta p_n^0. \tag{3}$$

无損于一般性，可以认为(3)式积分号下的雅科毕式是正的，因之，絕对值符号可以省去[①]。

于是，在积分号下对 t 求微分之后，我們便得到：

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0} = \underbrace{\int\cdots\int}_{J_0} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial(q_1, p_1, \cdots, q_n, p_n)}{\partial(q_1^0, p_1^0, \cdots, q_n^0, p_n^0)}\right]_{t=t_0} \delta q_1^0 \delta p_1^0 \cdots \delta q_n^0 \delta p_n^0.$$

---

① 当 $t = t_0$ 时这个雅科毕式等于1，这是因为在这个 t 值，全体 $q_k = q_k^0$，全体 $p_k = p_k^0$。当 t 变化时，雅科毕式連續地变化，但不会变为零。因为能够使这个雅科毕式变为零的奇点不在討論之列，即假定在所討論的体积里沒有这样的奇点。

但是，

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial(q_1,p_1,\cdots,q_n,p_n)}{\partial(q_1^0,p_1^0,\cdots,q_n^0,p_n^0)}\right]_{t=t_0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial(q_1,p_1,\cdots,\dot{q}_i,p_i,\cdots,q_n,p_n)}{\partial(q_1^0,\cdots,p_n^0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial(q_1,p_1,\cdots,q_i,\dot{p}_i,\cdots,q_n,p_n)}{\partial(q_1^0,\cdots,p_n^0)}\right]_{t=t_0}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i^0}+\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i^0}\right]_{t=t_0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial q_i^0}\frac{\partial H(t_0,q_k^0,p_k^0)}{\partial p_i^0}-\frac{\partial}{\partial p_i^0}\frac{\partial H(t_0,q_k^0,p_k^0)}{\partial q_i^0}\right]=0.$$

因此，$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0}=0$。又因为初始时刻 t_0 可以完全任意地选取，所以对任何 t 恒有:

$$\frac{dJ}{dt}=0, \tag{4}$$

即当相体积 J 中的一切点，由时刻 t_0 所具有的状态进入任意的另一时刻 t 所具有的状态时，这个体积的大小是不变的。

由相体积的不变性可以导出統計力学的一个基本定理——刘維定理。

設想有大量的完全相同的系統"样本"。它們之間仅有初始状态 q_i^0, $p_i^0(i=1,\cdots,n)$ 的差异。这些"样本"的全体組成統計系綜(見王竹溪著"統計物理学导論"，第一章第七节——譯者注)。

在給定体积内，气体分子的总合就是統計系綜的一个例子。

对于相空間的每个元体积 dV，都可以給定一个"质量" $d\mu$ 以表示占有此元体积 dV 的"样本"数量。根据前面所证明的相空間的体积不变性，dV 的大小将不随时間改变。按 $d\mu$ 的物理意义，占有体积 dV 的样本，在任何时刻都将随此体积一同移动，故其大小也不变。因此，在运动中，統計系綜的密度

$$\rho(t, q_i, p_i) = \frac{d\mu}{dV} \tag{5}$$

保持不变，即

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{6}$$

将(6)式展开，可以写成如下形式(见 § 15)：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho H) = 0, \tag{6'}$$

其中(ρH)是泊松括弧。根据等式(6)，函数 $\rho(t, q_i, p_i)$ 乃是运动积分。

这样，我們便证明了如下的定理：

刘維定理. 統計系綜的密度永远是运动积分。

例如，对于保守系統，依賴于系統能量的任何函数都可以作为統計系綜的密度。

第四章 正則变换和哈密頓-雅科毕方程

§24. 正則变换

在 $2n$ 維相空間中，如果坐标变换（在一般情况下，还包含时間变量 t 作为参数）

$$\tilde{q}_i=\tilde{q}_i(t, q_k, p_k),$$
$$\tilde{p}_i=\tilde{p}_i(t, q_k, p_k)$$
$$\left(i=1, \cdots, n;\ \frac{\partial(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \cdots, \tilde{q}_n, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, p_1, \cdots, q_n, p_n)}\neq 0\right) \tag{1}$$

将任何哈密頓方程組

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1, \cdots, n) \tag{2}$$

仍然变成哈密頓方程組（一般說来，具有另一哈密頓函数 $\widetilde{H}$）：

$$\frac{d\tilde{q}_i}{dt}=\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \tilde{p}_i},\ \frac{d\tilde{p}_i}{dt}=-\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}\quad (i=1, \cdots, n), \tag{3}$$

則变换（1）称为正則变换。

研究正則变换的重要性在于：这种变换有可能将給定的哈密頓方程組（2）轉換为另一哈密頓方程組（3），而組（3）中的函数 $\widetilde{H}$ 比組（2）的 H 有較为簡单的結构。

在相空間中，如果依次完成两个正則变换，則其合成变换仍是正則变换。此外，正則变换的逆变换以及恒等变换 $\tilde{q}_i=q_i$，$\tilde{p}_i=p_i(i=1, \cdots, n)$都是正則变换。因此，全体正則变换构成一个群。

例題 1. 不难驗证，变换

$$\tilde{q}_i=\alpha q_i,\ \ \tilde{p}_i=\beta p_i\quad (i=1, \cdots, n;\ \alpha\neq 0,\ \ \beta\neq 0)$$

是正則的，它将方程組（2）变为具有

$$\widetilde{H}=\alpha\beta H$$

的方程組(3)。

2. 变换

$$\tilde{q}_i=\alpha p_i,\ \ \tilde{p}_i=\beta q_i\quad(i=1,\cdots,n;\ \ \alpha\neq 0,\ \ \beta\neq 0)$$

是正則的。在此情形下，

$$\widetilde{H}=-\alpha\beta H.$$

3. 变换

$$\tilde{q}_i=p_i\ \mathrm{tg}\ t,\ \ \tilde{p}_i=q_i\ \mathrm{ctg}\ t\ \ (i=1,\cdots,n)$$

是正則的。其实，不难驗证，当取

$$\widetilde{H}=-H+\frac{1}{\sin t\cos t}\sum_{i=1}^{n}\tilde{q}_i\tilde{p}_i$$

时，总可以由方程組(2)得到方程組(3)。

为了导出变换(1)的正則性条件，我們来考察在正則变换(1)之下，相互轉换的两个 $2n+1$ 維增广相空間 (q_i, p_i, t) 和 $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t)$，以及哈密頓方程組(2)和(3)的两个相互对应的正路管（图39）。

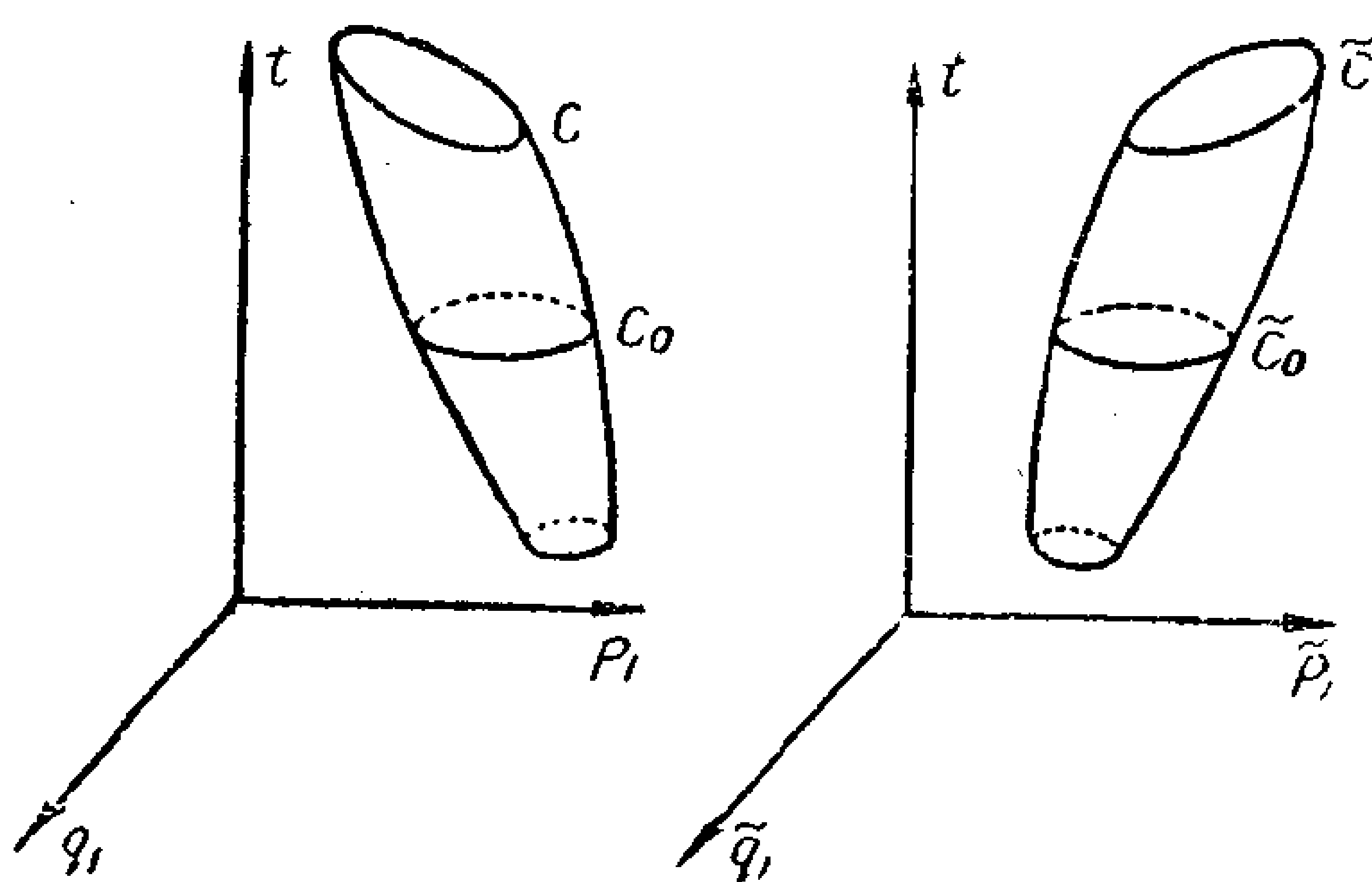


图　39.

环繞这两个正路管任取两条在变换(1)之下相互对应的閉合迴路 C 和 $\widetilde{C}$。另外，再以同一超平面 $t=$ $=\mathrm{const}$ 截此二管，則在截面上得到二“平面”迴路 C_0 和 $\widetilde{C}_0$。显然，这两条迴路在正則变换(1)之下也是相互轉换的(因为在正則变换中 t 保持不变)。由龐伽雷-卡当积分不变性可以断定：

$$\oint_C\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t=\oint_{C_0}\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i,\tag{4}$$

$$\oint_{\widetilde{C}} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \, \delta\widetilde{q}_i - \widetilde{H}\,\delta t = \oint_{\widetilde{C}_0} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \, \delta\widetilde{q}_i. \tag{5}$$

从另一方面看，如果将通用积分不变量 $\oint \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \, \delta\widetilde{q}_i$ 中的变量用正則变換(1)轉換为变量 $q_i, p_i (i=1, \cdots, n)$，則这个积分便轉換为 $2n$ 維相空間 (q_i, p_i) 的某一个一阶通用积分不变量；按李华中定理，这个积分不变量和 $\oint \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i$ 应当仅差一常数因子 c。因此，

$$\oint_{\widetilde{C}_0} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \, \delta\widetilde{q}_i = c \oint_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i. \tag{6}$$

由等式(4)—(6)得：

$$\oint_{\widetilde{C}} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \delta\widetilde{q}_i - \widetilde{H}\,\delta t = c \oint_{C} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\,\delta t. \tag{7}$$

如果认为第一个积分中的变量 $\widetilde{q}_1, \cdots, \widetilde{p}_n$ 已經以变量 $q_1, \cdots, p_n$ 表出(同时，积分迴路 $\widetilde{C}$ 已被换成积分迴路 C)，則等式(7)便可以改写成：

$$\oint_{C} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i \, \delta\widetilde{q}_i - \widetilde{H} \, \delta t - c\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H\,\delta t \right] = 0. \tag{8}$$

但是迴路 C 在 $2n+1$ 維增广相空間中是完全任意的。因此，(8)式积分号下的表达式应当是关于 $2n+1$ 个宗量 $q_1, p_1, \cdots, q_n, p_n$ 和 t 的某一函数的全微分。为方便計，我們以 $-F(t, q_i, p_i)$ 表示这个函数。于是，便有[①]：

① 这里，$\delta F = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i\right) + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t.$

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i\delta\widetilde{q}_i-\widetilde{H}\delta t=c\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t\right)-\delta F. \qquad (9)$$

应当注意，恒等式(9)中的常数 c 是永远不等于零的($c\neq0$)，因为表达式$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i\delta\widetilde{q}_i-\widetilde{H}\delta t$ 不是全微分[①]，它不可能和 $-\delta F$ 相等。

函数 F 称为正則变换(1)的母函数，常数 c 称为它的价。如果 $c=1$，則这种正則变换称为单价正則变换。

变换(1)为正則变换的必要充分条件是：存在母函数 F 和某一常数 c，由于变换(1)使等式(9)恒被满足。

注. 如果变换(1)是正則的，則存在母函数 F 和价 $c\neq0$，使得对于任何函数 H 和与之对应的 $\widetilde{H}$ 之間有等式(9)成立。然而，如果等式(9)对于某一对函数 H 和 $\widetilde{H}$ 成立，則变换(1)也必是正則的[②]。

事实上，如果在 H 之外，另取一任意函数 H_1，并按如下条件来确定 $\widetilde{H}_1$:

$$\widetilde{H}_1-\widetilde{H}=c(H_1-H),$$

則当以 δt 乘上式两端并与等式(9)相减时，我們便得到

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i\delta\widetilde{q}_i-\widetilde{H}_1\delta t=c\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H_1\delta t\right)-\delta F.$$

因此，等式(9)对于任何函数 H_1 和与之对应的 $\widetilde{H}_1$ 也是正确的。

---

① 对于独立变量 $\widetilde{q}_i, \widetilde{p}_i, t$ 不是全微分，因而对于独立变量 q_i, p_i, t $(i=1,\cdots,n)$ 也不是全微分。

② 但是不能因此就认为正則变换可以定义为：将一个給定的哈密頓方程組变换为另一个哈密頓方程組的变换。

这是因为，例如，任何非正則变换 $\widetilde{q}_i=\widetilde{q}_i(q_k,p_k)$, $\widetilde{p}_i=\widetilde{p}_i(q_k,p_k)$ $(i=1,\cdots,n)$ 都能将 $H\equiv0$ 的哈密頓方程組变换为 $\widetilde{H}\equiv0$ 的哈密頓方程組。

正則变换有时也称为接触变换。

在文献中，常常只討論单价正則变换。許多作者錯誤地认为，所有将哈密頓方程組变换为哈密頓方程組的变换 (1) 仅只是单价的正則变换。这些作者沒有注意到任意正則变换的一般形式中应当有任意常因子 c。

§ 25. 自由正則变换

我們現在来比較仔細地研究一下所謂自由正則变换。这种变换由补充不等式

$$\frac{\partial(\tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_n)}{\partial(p_1, \cdots, p_n)} \neq 0 \tag{1}$$

所規定，它保证了量 $t, q_1, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_n$ 的独立性。这些量現在可以取作基本变量①。事实上，根据不等式 (1) 就可以由 § 24 (1) 式的前 n 个方程将广义冲量 $p_1, \cdots, p_n$ 通过 $2n+1$ 个量 $t, q_i, \tilde{q}_i$ $(i=1, \cdots, n)$ 来表示，因而，依賴于变量 $t, q_i, p_i (i=1, \cdots, n)$ 的任何函数都可以写成变量 $t, q_i, \tilde{q}_i \ (i=1, \cdots, n)$ 的函数形式。現在我們可以认为母函数已被写成这些变量的函数形式 S:

$$F(t, q_i, p_i) = S(t, q_i, \tilde{q}_i).$$

于是，上节的基本恒等式(9)便可写成

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - \widetilde{H} \delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t\right) - \delta S(t, q_i, \tilde{q}_i). \tag{2}$$

使上式左右两端中 $\delta q_i, \delta \tilde{q}_i$, 和 δt 的系数相等，我們便得到以下公式:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = c p_i, \ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \quad (i=1, \cdots, n), \tag{3}$$

$$\widetilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{4}$$

① 在非自由正則变换的情况下，量 $t, q_i, \tilde{q}_i (i=1, \cdots, n)$ 之間有着一定的关系。

方程(3)决定了所討論的正則变换。我們来证明它可以化为§24 变换(1)的形式。

(3)式前 n 个方程左端的偏导数 $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ $(i=1, \cdots, n)$ 作为变量 $\tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_n$ 的函数是独立的，因为根据公式(3)，相关关系①

$$\Omega\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \cdots, q_n\right)=0$$

可以写成等式

$$\Omega(cp_1, \cdots, cp_n, q_1, \cdots, q_n)=0,$$

但由相空間中点的坐标 $q_i, p_i(i=1, \cdots, n)$ 的独立性可知这只有当 $\Omega\equiv 0$ 时才是可能的。由作为变量 $\tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_n$ 的函数的偏导数 $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ $(i=1, \cdots, n)$的独立性可以断定这些函数的雅科毕式不恒等于零。因此，对于自由正則变换的母函数 S，如下的行列式应异于零：

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k}\right)_{i, k=1}^{n} \neq 0. \tag{5}$$

由不等式(5)可知，从(3)式的前 n 个方程可以将 $\tilde{q}_i(i=1, \cdots, n)$解出来，因此，所有新的相变量 $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i(i=1, \cdots, n)$ 可以通过老的变量 $q_i, p_i(i=1, \cdots, n)$表示。同样，按不等式(5)，由(3)式的后 n 个等式又可将q_i解出来，因而所有的q_i, p_i亦可通过$\tilde{q}_i, \tilde{p}_i(i=1, \cdots, n)$表出，这表明如此所得到的形式如 §24 (1)的变换是可逆的，即对于这样的变换有$\frac{\partial(\tilde{q}_1, \cdots, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, \cdots, p_n)}\neq 0$。因此，方程(3)定义了一个具有給定母函数 $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ 和价 $c\neq 0$ 的自由正則变换。公式(4)給出哈密頓函数H和$\widetilde{H}$之間的簡单关系。

选取满足条件(5)的不同母函数 S 和不同的价 $c\neq 0$，我們就

① 在这个关系式中，量 $q_1, \cdots, q_n$ 被看作参数。

可以借公式(3)得到所有的自由正则变换[①]。

对于单价的($c=1$)自由正则变换，公式(3)和(4)有更为简单的形式:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i}=-\tilde{p}_i\quad (i=1,\cdots,n), \tag{6}$$

$$\widetilde{H}=H+\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{7}$$

(7)式表明当以同一个自由单价正则变换用于不同的哈密顿方程組时，在所有情况下，$\widetilde{H}$ 和 H 之差都是相同的$\left(等于\frac{\partial S}{\partial t}\right)$。

由等式(4)可知，当而且仅仅当$\frac{\partial S}{\partial t}=0$(母函数 S 不显含 t)时 $\widetilde{H}=cH$。在这种情况下，由等式(3)可知时間 t 将不显含于正则变换的公式中。在这样的正则变换下，函数 H 除了被常数 c 乘而外并无实质性的改变。因此，如果我們希望得到具有真正比較簡单的哈密頓函数的新方程組，就必須取包含时間 t 作为参数的自由正则变换。

例題 1. 在第 123—124 頁上曾討論过的三个正則变换:

1) $\tilde{q}_i=\alpha q_i,\ \tilde{p}_i=\beta p_i$; 2) $\tilde{q}_i=\alpha p_i,\ \tilde{p}_i=\beta q_i$;

3) $\tilde{q}_i=p_i\operatorname{tg}t,\ \tilde{p}_i=q_i\operatorname{ctg}t\ (i=1,\cdots,n)$,

其中 2)和 3)是自由的，它們的母函数和价分别为 $S=-\beta\sum_{i=1}^{n}q_i\tilde{q}_i,\ c=-\alpha\beta$; $S=-\operatorname{ctg}t\sum_{i=1}^{n}q_i\tilde{q}_i,\ c=-1$。变换 1)不是自由的。对于这个变换 $c=\alpha\beta$, $F\equiv 0$。

2. 我們来看相平面(q,p)(这里 $n=1$)上的任一仿射变换:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{q}&=\alpha q+\beta p,\\ \tilde{p}&=\alpha_1 q+\beta_1 p\quad (\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

---

① 关于非自由的正则变换也有类似于(3)的公式。这些公式将在 § 29 中来建立。

将(8)式代入第126頁上的基本恒等式(9)。由于(8)式右端不包含变量 t，所以要找的函数 F 也不显含时間 t：$F=F(q,p)$。因之，基本恒等式具有如下形式：

$$(\alpha_1 q+\beta_1 p)(\alpha\,\delta q+\beta\,\delta p)-cp\,\delta q=-\delta F,$$

或

$$\delta\left(\frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2+\frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2\right)+\alpha_1\beta q\,\delta p+(\alpha\beta_1-c)p\,\delta q=-\delta F.$$

在条件

$$c=\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$$

之下，上式左端是全微分。因此，变换(8)是 c 价的正則变换，c 等于变换的行列式，且母函数

$$F=\frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2+\frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2+\alpha_1\beta\,qp.$$

当 $\beta\neq 0$ 时这个变换是自由的。

3. 变换 $\tilde{q}=\sqrt{q}\cos 2p$，$\tilde{p}=\sqrt{q}\sin 2p$ 是单价自由正則变换，它的母函数

$$S=\frac{1}{2}q\arccos\frac{\tilde{q}}{\sqrt{q}}-\frac{1}{2}\tilde{q}\sqrt{q-\tilde{q}^2}.$$

对于自然系統，坐标 $q_1,\cdots,q_n$ 决定系統的位置，而坐标和广义冲量 $p_1,\cdots,p_n$ 一起便决定了系統的状态，即系統各点的位置和速度。在一般形式的正則变换之下，坐标的这一特征便消失了。量 $\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_n$ 已經不再能够确定系統的位置，而只能和 $\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_n$ 一起确定系統的状态。只有在点正則变换的特殊情形，变量 $\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_n$ 才能依归决定系統的位置，在这种变换中，函数 $\tilde{q}_i(t,q_k,p_k)$ 实际上不包含冲量：

$$\tilde{q}_i=\tilde{q}_i(t,q_k)\quad(i=1,\cdots,n).$$

我們应当注意，今后欲将任何哈密頓方程組变换为函数 H 有簡单結构的方程組时可借自由正則变换来实現。然而，自由正則变换并非点正則变换。因此，非点正則变换在哈密頓方程組的理論中起着重要作用。

§ 26. 哈密頓-雅科毕方程

正則变換的理論把我們直接引向哈密頓-雅科毕方程。

設給定一完整系統，它的运动决定于哈密頓正則方程組:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ \ (i=1,\cdots,n). \tag{1}$$

我們来設法建立一个自由正則变換，使得在变換后的哈密頓方程組

$$\frac{d\tilde{q}_i}{dt}=\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \tilde{p}_i},\ \frac{d\tilde{p}_i}{dt}=-\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}\ \ (i=1,\cdots,n) \tag{2}$$

中,函数 $\widetilde{H}$ 恒等于零:

$$\widetilde{H}=0. \tag{3}$$

于是組(2)便可以直接进行积分;积分之即得

$$\tilde{q}_i=\alpha_i,\ \ \tilde{p}_i=\beta_i, \tag{4}$$

其中 α_i 和 β_i 是 $2n$ 个任意常数。知道了正則变換[即 $q_i, p_i(i=1,\cdots,n)$ 和 $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i(i=1,\cdots,n)$ 之間的关系]之后,我們就可以将所有的 q_i 和 p_i 表示成时間 t 和 $2n$ 个任意常数 $\alpha_k, \beta_k(k=1,\cdots,n)$ 的函数,即完全求出了所給完整系統有限形式的运动方程[組(1)的全体解]。

怎样来确定我們所需要的正則变換呢？为此按前一节的公式(7),必須而且只須所求正則变換的母函数 $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ 滿足等式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(t, q_i, p_i)=0. \tag{5}$$

上式与同节中的公式(6)相結合便給出

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=0. \tag{6}$$

偏微分方程(6)称为哈密頓-雅科毕方程。因此，具有基本变量 t 和 q_i(这里 $\tilde{q}_i$ 被看做参数)的母函数 $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ 滿足哈密頓-雅科毕偏微分方程。同时,除哈密頓-雅科毕方程而外,母函数 $S(t,$

$q_i, \tilde{q}_i$)还应当满足条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k}\right)_{i,k=1}^n \neq 0. \tag{7}$$

母函数 $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$ 一經找到，公式

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i,\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i \quad (i=1, \cdots, n)$$

便决定了所要求的自由正則变換。在这些公式中将 $\tilde{q}_i$ 換成 α_i、$\tilde{p}_i$ 換成 β_i，我們就得到了所給完整系統有限形式的运动方程。如果一开始就把 S 中的 $\tilde{q}_i$ 換成 $\alpha_i (i=1, \cdots, n)$，則整个这个过程写起来将更为方便。

現在我們引入一个定义。包含 n 个任意常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的哈密頓-雅科毕偏微分方程的解 $S(t, q_i, \tilde{q}_i)$，当其满足条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i,k=1}^n \neq 0 \tag{8}$$

时，称为該偏微分方程的全积分。

現在可以来表述我們已經证明了的定理。

雅科毕定理 如果 $S(t, q_i, \alpha_i)$ 是哈密頓-雅科毕方程(6)的一个全积分，則具有給定函数 H 的完整系統，其有限形式的运动方程可以写成[①]

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i,\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i=1, \cdots, n) \tag{9}$$

的形式，其中 α_i 和 β_i 是任意常数$(i=1, \cdots, n)$。

因此，知道了偏微分方程(6)的全积分，就可以避免对常微分方程組(1)进行积分。这个方程組的积分問題被与之等价的、求哈密頓-雅科毕偏微分方程全积分的問題所代替。

注. 偏微分方程的通解依賴于若干任意函数。因此，哈密頓-

① 这里，我們将任意常数 $-\beta_i$ 就簡单地写作 β_i。根据条件(8)，从(9)式的后 n 个方程可以将 q_i 解出来，并将 $q_1, \cdots, q_n$ 表成 t 和 $2n$ 个任意常数 α_i, β_i 的函数。

雅科毕方程的全积分絕非通解。和通解相比，全积分只不过包括了为数不多的“一小部分”解。然而，根据全积分却可以得到原来的偏微分方程(“全积分”的名字即由此而来)。其实，将全积分微分之便得到

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=f_i(t, q_k, \alpha_k) \quad (i=1, \cdots, n), \tag{10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=f_0(t, q_k, \alpha_k). \tag{11}$$

如果全积分 $S(t, q_k, \alpha_k)$ 是已知的，則函数 $f_i(t, q_k, \alpha_k)(i=0, 1, \cdots, n)$ 也是已知的。根据条件(8):

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)}=\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i, k=1}^n \neq 0, \tag{12}$$

由关系(10)便可以将每个 α_k 通过偏导数$\frac{\partial S}{\partial q_i}$和 t、q_i 表示出来。将所得 α_k 的表达式代入等式 (11) 我們便得到了原来的偏微分方程(6)[①]。

作为哈密頓-雅科毕方程全积分的一个例子，我們来看所謂的哈密頓主函数。为此，我們轉回头来看第 95 頁的公式(7)和图 33。我們只討論当 $t_0(\alpha)=\text{const}=t_0$ 时的特殊情况，即迴路 C_0 是由系統在 $t=t_0$ 时的初始状态所組成。此外，将 t_1, q_i^1, p_i^1, H_1 就簡单地写成 t, q_i, p_i, H。于是，如果以W表示沿正路(即沿正路管之母綫)从起始点 $(t=t_0)$ 到对应于給定 t 值的終点的作用量，則

$$\delta W=\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i-H \delta t-\sum_{i=1}^n p_i^0 \delta q_i^0. \tag{13}$$

如果利用有限形式的运动方程

① 因为在方程(6)中仅有 S 的偏导数，而不包含函数 S 本身，所以可以认为全积分还包含有第 $n+1$ 个可加任意常数 α_{n+1}。

$$q_i=\varphi_i(t, q_k^0, p_k^0), \tag{14}$$

$$p_i=\psi_i(t, q_k^0, p_k^0) \quad (i=1, \cdots, n) \tag{15}$$

将作用量

$$W=\int_{t_0}^{t} L(t, q_i, \dot{q}_i)dt$$

中的 $q_i(t)$以其表达式(14)来代替，則W便成为 $t, q_i^0, p_i^0(i=1, \cdots, n)$的函数。哈密頓曾利用有限形式的运动方程(14)将 p_k^0 以 t, q_i^0, q_i 表出，使作用量写成

$$W=W(t, q_i, q_i^0) \tag{16}$$

的形式。

写成形式(16)的作用量W(即表为初始坐标、終了坐标和終了时刻 t 的函数形式)被称之为哈密頓主函数。将等式(13)中的W看作哈密頓主函数，由这个等式我們便得到:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=p_i, \ \frac{\partial W}{\partial q_i^0}=-p_i^0 \quad (i=1, \cdots, n), \tag{17}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-H(t, q_i, p_i). \tag{18}$$

由等式(17)和(18)即可断定哈密頓主函数满足哈密頓-雅科毕方程:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(t, q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right)=0, \tag{19}$$

而关系式(17)乃是包含$2n$个任意常数 $q_i^0, p_i^0(i=1, \cdots, n)$的有限运动方程。

这样，哈密頓就向我們指出了一个如何利用方程(19)的全积分得到有限形式运动方程的方法。但是，哈密頓的这个全积分并不是任意的，它所包含的任意常数必須是初值 q_i^0 和 p_i^0。这就兜起圈子来了：为了写出有限形式运动方程(17)，需要知道哈密頓主函数，而要得到这个主函数，如前所述，又需要有限形式的运动

方程。

雅科毕的功績就在于他継續了哈密頓的研究，打开了这一困难局面。他指出，有限形式运动方程可借哈密頓方程的任何全积分 $S(t, q_i, \alpha_i)$ 写成如(9)的形式。

我們現在轉回头来看恒等式(13)，并将它和第127頁上的恒等式(2)进行比較。从比較中可以看出，公式(14)和(15)这組将哈密頓坐标(系統在时刻 t 的状态)以初始坐标 $q_1^0, \cdots, p_n^0$ 表出的有限运动方程可以看作由变量 $q_i^0, p_i^0 (i=1, \cdots, n)$ 到变量 $q_k, p_k (k=1, \cdots, n)$ 的自由单价正則变換；这个正則变換的母函数是 $-W$，其中 W 是哈密頓主函数①。

因此，借任一哈密頓方程組的运动所实現的相空間变換是正則的(同时还是自由单价的)。

例題. 建立自由质点作惯性运动时的哈密頓主函数。在这种情况下(假定 $t_0=0$)

$$x=x_0+\dot{x}_0 t, \quad y=y_0+\dot{y}_0 t, \quad z=z_0+\dot{z}_0 t,$$

因而

$$W=\frac{m}{2}\int_0^t(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)dt=$$

$$=\frac{mt}{2}(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2)=\frac{m}{2t}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2].$$

如果由所得的哈密頓主函数

$$W=\frac{m}{2t}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2].$$

出发，則根据公式(17)即可得到运动方程，它在本例中具有如下形式：

$$p_x=\frac{\partial W}{\partial x}=m\frac{x-x_0}{t}; \qquad -p_x^0=\frac{\partial W}{\partial x_0}=-m\frac{x-x_0}{t},$$

$$p_y=\frac{\partial W}{\partial y}=m\frac{y-y_0}{t}; \qquad -p_y^0=\frac{\partial W}{\partial y_0}=-m\frac{y-y_0}{t},$$

$$p_z=\frac{\partial W}{\partial z}=m\frac{z-z_0}{t}; \qquad -p_z^0=\frac{\partial W}{\partial z_0}=-m\frac{z-z_0}{t}.$$

---

① 由变量 q_i, p_i 到变量 q_i^0，p_i^0 的逆正則变換的母函数則是哈密頓主函数 W。

假若我們討論的是广义保守系統$\left(\frac{\partial H}{\partial t}=0\right)$,則哈密頓-雅科毕方程便具有

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=0 \tag{20}$$

的形式，且其全积分可以写成

$$S=-ht+V(q_1, \cdots, q_n;\ \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, h) \tag{21}$$

的形式,式中 h 和 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 都是任意常数。

将 S 的这个表达式代入方程(20)，我們便得到决定函数 V 的如下方程:

$$H\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)=h. \tag{22}$$

求出这个方程的全积分,即满足不等式

$$\det\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i, k=1}^{n} \neq 0 \ \ (\alpha_n \equiv h) \tag{23}$$

的解 $V(q_i; \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, h)$,我們便可以利用公式(9)和(21)得到广义保守系統的有限运动方程如下:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i \quad (i=1, \cdots, n), \tag{24'}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j}=\beta_j \ \ (j=1, \cdots, n-1), \ \frac{\partial V}{\partial h}=t+\gamma, \tag{24''}$$

其中 α_j, β_j $(j=1, \cdots, n-1)$, h 和 γ 都是任意常数。

根据条件(23),坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 可由方程(24″)解出,并写成 t 和 $2n$ 个任意常数 α_j, β_j, h 和 γ 的函数。将所得表达式代入方程(24′),我們便得到关于广义冲量 $p_i(i=1, \cdots, n)$ 的类似表达式①。

在广义保守系統的情况下，我們以独立变量少一个的方程

① 由(24″)式的前 $n-1$ 个方程,可以将 $n-1$ 个坐标通过余下的第 n 个坐标和 $2n-1$ 个任意常数表出。这样,我們便得到坐标空間中的軌道方程,而(24″)式最后一个方程便給出坐标和时間变量 t 之間的关系。

(20)代替了方程(6)。与此相仿,若坐标之一是循环的,则偏微分方程的独立变量也将少一个。

我們現在来看当有若干个坐标 $q_{m+1}, \cdots, q_n$ 是循环坐标时的一般情形。此时 $H=H(t, q_1, \cdots, q_m, p_1, \cdots, p_n)$, 而且哈密頓-雅科毕方程的全积分可以写成

$$S=\sum_{\mu=m+1}^{n} \alpha_\mu q_\mu+S_0(t, q_1, \cdots, q_m, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \tag{25}$$

的形式。

对于函数 S_0 則有:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+H\left(t, q_1, \cdots, q_m, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n\right)=0. \tag{26}$$

如果, $q_{m+1}, \cdots, q_n$ 是广义保守系統的循环坐标,則函数 S 便可以取如下形式*:

$$S=-ht+\sum_{\mu=m+1}^{n} \alpha_\mu q_\mu+V_0(q_1, \cdots, q_m, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, h), \tag{27}$$

其中函数 V_0 由方程

$$H\left(q_1, \cdots, q_m, \frac{\partial V_0}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial V_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n\right)=h \tag{28}$$

来确定。

§27. 分离变量法·例题

我們在前面已經指出,正則方程組的积分可归結为求哈密頓-雅科毕方程的全积分。这一論断不仅有其理論上的价值。看来許多动力学問題,包括理論物理学上的一些有趣問題都将据此得到自己方便的实用解。

---

* V_0 中的 α_m 是可加任意常数。——譯者注

現在我們来向讀者介紹求哈密頓-雅科毕方程全积分的分离变量法。这个方法适用于当广义保守系統的哈密頓函数H具有特殊結构时的情况。

1°．假設

$$H=G[f_1(q_1,p_1),\cdots,f_n(q_n,p_n)]. \tag{1}$$

此时，在函数H的表达式中，变量已被分离：每个函数f_i只包含一对共軛变量q_i、p_i。

上节中的方程(22)现在可以写成

$$G\left[f_1\left(q_1,\frac{\partial V}{\partial q_1}\right),\cdots,f_n\left(q_n,\frac{\partial V}{\partial q_n}\right)\right]=h. \tag{2}$$

令

$$f_i\left(q_i,\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)=\alpha_i \quad (i=1,\cdots,n), \tag{3}$$

其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是任意常数。于是，按公式(1)，常数h可以通过常数$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$表示成如下形式：

$$h=G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n). \tag{4}$$

由等式(3)解出$\frac{\partial V}{\partial q_i}$，得①：

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=F_i(q_i,\alpha_i) \quad (i=1,\cdots,n),$$

$$V=\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i,\alpha_i)dq_i \tag{5}$$

$$S=-G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)t+\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i,\alpha_i)dq_i. \tag{6}$$

在此情形，

① 我們假定每个函数$f_i(q_i,p_i)$实质上都包含相应的冲量p_i，即$\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\neq 0$。因此由方程(3)可以解出$p_i=\frac{\partial V}{\partial q_i}$来；每个函数$F_i$都是两个变量$q_i$和$\alpha_i$的函数；$i=1,\cdots,n$。

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i}=\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i},\quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}=0 \text{ 当 } i\neq k \text{ 时}$$
$$(i, k=1, \cdots, n),$$

同时基本条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right)_{i,k=1}^{n}\neq 0 \tag{7}$$

归結为不等式

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i}\neq 0.$$

又由于关系式

$$f_i(q_i, p_i)=\alpha_i \tag{8}$$

和方程

$$p_i=F_i(q_i, \alpha_i) \tag{9}$$

等价，故

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)^{-1}\neq 0 \quad (i=1, \cdots, n), \tag{10}$$

而且条件(7)永远被满足。因此，公式(6)給出了哈密頓-雅科毕方程的全积分。

有限运动方程

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i \quad (i=1, \cdots, n) \tag{11}$$

在所給情况下可以写成如下形式[①]:

---

① 我們将公式(5)和(6)中的积分 $\int F_i(q_i, \alpha_i)dq_i$ 理解为积分 $\int_{\gamma_i}^{q_i} F_i(q_i, \alpha_i)dq_i$，其中常数 γ_i 固定不变，而且和任意常数 α_k 无关。于是，

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\sum_{k=1}^{n}\int F_k(q_k, \alpha_k)dq_k=\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\int F_i(q_i, \alpha_i)dq_i=\int\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i}dq_i.$$

然后再利用关系式(10)。

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial G}{\partial \alpha_i}t+\int\frac{dq_i}{\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)_{p_i=F_i(q_i,\alpha_i)}}=\beta_i\ (i=1,\cdots,n),\\ p_i=F_i(q_i,\alpha_i).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

因此，借求积法便可以得到有限运动方程。

例 1. 我們来看一自由度振子

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{cq^2}{2}.$$

令 $G(\alpha)\equiv\alpha$, $f(p,q)\equiv\frac{p^2}{2m}+\frac{cq^2}{2}=\alpha$, 則得:

$$p=F(q,\alpha)\equiv\sqrt{2m\alpha-mcq^2}. \tag{13}$$

因此，运动方程[見(12)]具有如下形式:

$$-t+\frac{1}{\omega}\int\frac{dq}{\sqrt{A^2-q^2}}=\beta, \tag{14}$$

其中

$$A^2=\frac{2\alpha}{c},\quad \omega^2=\frac{c}{m}.$$

注意到(14) 式中的积分等于 $\arcsin\frac{q}{A}$, 我們便得到如下形式的运动方程:

$$q=A\sin\omega(t+\beta). \tag{15}$$

2°. 若

$$H=g_n\{\cdots g_3\{g_2[g_1(q_1,p_1),q_2,p_2],q_3,p_3\}\cdots q_n,p_n\} \tag{16}$$

則决定 V 的方程便可以写成

$$g_n\left\{\cdots g_3\left\{g_2\left[g_1\left(q_1,\frac{\partial V}{\partial q_1}\right),\ q_2,\frac{\partial V}{\partial q_2}\right],q_3,\frac{\partial V}{\partial q_3}\right\}\cdots q_n,\frac{\partial V}{\partial q_n}\right\}=h.$$

現在引入任意常数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 和 $\alpha_n=h$, 并依次令

$$\left.\begin{aligned}g_1\left(q_1,\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)&=\alpha_1,\\ g_2\left(\alpha_1,q_2,\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)&=\alpha_2,\\ &\cdots\cdots\\ g_n\left(\alpha_{n-1},q_n,\frac{\partial V}{\partial q_n}\right)&=\alpha_n.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

由此解出各个偏导数①:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=G_1(q_1,\alpha_1),$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2}=G_2(q_2,\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_n}=G_n(q_n,\alpha_{n-1},\alpha_n).$$

于是,便有

$$V=\sum_{i=1}^{n}\int G_i(q_i,\alpha_{i-1},\alpha_i)dq_i\text{②},\tag{18}$$

$$S=-\alpha_n t+\sum_{i=1}^{n}\int G_i(q_i,\alpha_{i-1},\alpha_i)dq_i.\tag{19}$$

这里,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial\alpha_i}=\frac{\partial G_i}{\partial\alpha_i},\quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial\alpha_k}=0 \text{ 当 } i<k \text{ 时},$$

$$(i,k=1,\cdots,n).$$

因之,条件(7)化为不等式

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial G_i}{\partial\alpha_i}\neq 0.$$

这个不等式永远是成立的,因为方程

$$g_i(\alpha_{i-1},q_i,p_i)=\alpha_i\tag{20}$$

和方程

$$p_i=G_i(q_i,\alpha_{i-1},\alpha_i)\tag{21}$$

---

① 我們假設$\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\neq 0$,即函数$g_i(q_i,p_i)$中确实含$p_i$。

② 这里以及本节以后各处,我們把不定积分都理解为具有变上限和与常数$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$无关的不变下限的定积分(如1°中所注)。

等价，因而

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}=\left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right)^{-1}_{p_i=G_i(q_i,\alpha_{i-1},\alpha_i)}\neq 0 \quad (i=1,\cdots,n). \tag{22}$$

下面我們要用到的偏导数$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}}$，它的表达式可由方程(20)和(21)求得，即

$$\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_{i-1}}=-\left(\frac{\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_{i-1}}}{\frac{\partial g_i}{\partial p_i}}\right)_{p_i=G_i(q_i,\alpha_{i-1},\alpha_i)}. \tag{23}$$

将表达式(19)代入有限运动方程(11)，并考虑到公式(22)和(23)，最后便得到：

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{dq_i}{\left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right)_{p_i=G_i(q_i,\alpha_{i-1},\alpha_i)}}\\&\quad-\int\left(\frac{\frac{\partial g_{i+1}}{\partial \alpha_i}}{\frac{\partial g_{i+1}}{\partial p_{i+1}}}\right)_{p_{i+1}=G_{i+1}(q_{i+1},\alpha_i,\alpha_{i+1})}dq_{i+1}=\beta_i\\&\quad(i=1,\cdots,n-1),\\&\quad-t+\int\frac{dq_n}{\left(\frac{\partial g_n}{\partial p_n}\right)_{p_n=G_n(q_n,\alpha_{n-1},\alpha_n)}}=\beta_n,\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$p_i=G_i(q_i,\alpha_{i-1},\alpha_i) \quad (i=1,\cdots,n). \tag{25}$$

这里，(24)式的前 $n-1$ 个方程是坐标空間中軌道族的方程；这些方程包含 $2n-1$ 个任意常数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$。(24)式最后一个方程包含新的任意常数 β_n，它給出坐标 q_n 和时間变量 t 之間的关系。

将得自方程(24)的函数 $q_i(t,\alpha_k,\beta_k)(i=1,\cdots,n)$ 代入方程(25)之后，冲量 $p_i(i=1,\cdots,n)$ 就被确定为 t 和所有任意常数 α_i，$\beta_i(i=1,\cdots,n)$的函数。

例 2. 我們来討論开普勒运动：质量为 m 的质点在中心(吸引)力作用下的运动，力的大小与质点到力心的距离平方成反比。

在这种情况下，在球坐标中

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2),\ \Pi=-\frac{\gamma}{r}(\gamma>0),$$

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\psi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)-\frac{\gamma}{r}.$$

令

$g_1\equiv p_\psi=\alpha_1,\ g_2\equiv p_\theta^2+\dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}=\alpha_2,\ g_3\equiv\dfrac{1}{2m}\left(p_r^2+\dfrac{\alpha_2}{r^2}\right)-\dfrac{\gamma}{r}=\alpha_3$. 于是，根据公式(24)，我們便得到：

$$\psi-\alpha_1\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha_2-\dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}}=\beta_1, \tag{26a}$$

$$\int\frac{d\theta}{2\sqrt{\alpha_2-\dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}}-\int\frac{\dfrac{1}{r^2}dr}{2\sqrt{2m\alpha_3+\dfrac{2m\gamma}{r}-\dfrac{\alpha^2}{r^2}}}=\beta_2, \tag{26b}$$

$$-t+\int\frac{mdr}{\sqrt{2m\alpha_3+\dfrac{2m\gamma}{r}-\dfrac{\alpha_2}{r^2}}}=\beta_3. \tag{26c}$$

我們得到了开普勒运动的有限形式方程。

在研究这一运动时，可以认为初始速度位于子午面 $\psi=\text{const}$ 上而不失其一般性。于是，在初始时刻 $\dfrac{d\psi}{d\theta}=0$，因而，根据公式(26a)有：

$$\alpha_1=0 \tag{27}$$

和 $\psi=\beta_1=\text{const}$，即运动是平面的。将等式(26b)和(26c)逐項微分之，我們便得到扇形速度① 等于

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{\sqrt{\alpha_2}}{2m}=\text{const},$$

即质点在平面 $\psi=\text{const}$ 上按面积定律运动。

最后，为了确定軌道，我們令 $\dfrac{1}{r}=x$，于是由公式(26b)，同时考虑到等式(27)，便得到：

---

① 即引自力心的矢徑所扫过的面积对时間的导数。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c+2kx-x^2}}=\beta-\theta,$$

其中

$$c=\frac{2m\alpha_3}{\alpha_2},\ k=\frac{m\gamma}{\alpha_2},\ \beta=2\sqrt{\alpha_2}\,\beta_2. \tag{28}$$

积分之后卽得：

$$\arccos\frac{x-k}{\sqrt{k^2+c}}=\theta-\beta,$$

因之，

$$x=k+\sqrt{k^2+c}\cos(\theta-\beta).$$

最后，根据 $x=\frac{1}{r}$ 的关系可知軌道方程是圓錐截綫，它的一个焦点位于力心上，卽：

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\beta)}, \tag{29}$$

式中圓錐截綫的参数和偏心率由下列等式确定：

$$p=\frac{1}{k}=\frac{\alpha_2}{m\gamma},\ e=\sqrt{1+\frac{c}{k^2}}=\sqrt{1+\frac{2\alpha_2\alpha_3}{m\gamma^2}}. \tag{30}$$

假設质点軌道是封閉的（在太阳吸引下的行星运动），則此軌道是橢圓，力心（太阳）在它的一个焦点上。

以 F 和 $a,b(a>b)$ 分别表示橢圓的面积和它的两个半軸之长，则得$\left(因为\ p=\frac{b^2}{a}\right)$：

$$\frac{F^2}{a^3}=\frac{\pi^2a^2b^2}{a^3}=\pi^2p.$$

設 τ 为周期（轉一圈的时間），則 $\tau=\frac{2mF}{\sqrt{\alpha_2}}$。于是，根据等式(30)，

$$\frac{1}{4}\frac{\tau^2}{a^3}=\frac{m^2}{\alpha_2}\frac{F^2}{a^3}=\frac{\pi^2m^2p}{\alpha_2}=\frac{\pi^2m}{\gamma}=\frac{\pi^2}{\gamma_1}\left(\gamma_1=\frac{\gamma}{m}\right); \tag{31}$$

按牛頓引力定律，式中的 γ_1 仅与吸引中心有关。于是我們得到了行星繞日运动的开普勒三定律：1）行星以不变的扇形速度沿平面軌道运动；2）这些軌道是橢圓，太阳位于此橢圓的一个焦点上；3）运行一周的时間平方和軌道长半軸立方之比对于所有行星都是一样的。

3°．作为应用分离变量法的另一个例子，我們来看当

$$H=\frac{f_1(q_1,p_1)+\cdots+f_n(q_n,p_n)}{g_1(q_1,p_1)+\cdots+g_n(q_n,p_n)} \tag{32}$$

时的情形。此时，基本微分方程

$$H=\left(q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)=h$$

可以写成如下形式:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)-hg_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\right]=0. \tag{33}$$

我們令

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)-hg_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)=\alpha_i \cdot (i=1, \cdots, n), \tag{34}$$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 都是任意常数；常数 α_n，根据方程(33)和等式(34)，可以通过 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 来表示，即

$$\alpha_n=-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1}. \tag{35}$$

由方程(34)解出偏导数 $\frac{\partial V}{\partial q_i}$，得:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=F_i(q_i, \alpha_i, h)(i=1, \cdots, n). \tag{36}$$

将方程(33)的解取作如下形式:

$$V=\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i, \alpha_i, h)dq_i, \tag{37}$$

則哈密頓-雅科毕方程的全积分具有形式

$$S=-ht+\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i, \alpha_i, h)dq_i. \tag{38}$$

于是，有限运动方程(11)可用求积法得到:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{\partial F_j}{\partial \alpha_j}dq_j-\int\frac{\partial F_n}{\partial \alpha_n}dq_n=\beta_j \quad (j=1, \cdots, n-1),\\&\sum_{i=1}^{n}\int\frac{\partial F_i}{\partial h}dq_i=t+\beta_n,\\&p_i=F_i(q_i, \alpha_i, h) \quad (i=1, \cdots, n)\\&(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0).\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

假設方程 $f_i(q_i, p_i)-hg_i(q_i, p_i)=\alpha_i$ 滿足可解性条件: $\frac{\partial f_i}{\partial p_i}-h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\neq 0$，于是由此方程便可以解出 p_i 来，得: $p_i=F_i(q_i, \alpha_i, h)(i=1, \cdots, n)$。此时，隐函数 F_i 的导数

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i}=\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i}-h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1}_{p_i=F_i(q_i,\alpha_i,h)},$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial h}=\left\{\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i}-h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1}g_i(q_i,p_i)\right\}_{p_i=F_i(q_i,\alpha_i,h)}$$

$$(i=1,\cdots,n).$$

方程(39)的最終形式为:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int\left[\frac{\partial f_j}{\partial p_j}-h\frac{\partial g_j}{\partial p_j}\right]^{-1}_{p_j=F_j(q_j,\alpha_j,h)}dq_j-\\ \displaystyle\qquad-\int\left[\frac{\partial f_n}{\partial p_n}-h\frac{\partial g_n}{\partial p_n}\right]^{-1}_{p_n=F_n(q_n,\alpha_n,h)}dq_n=\beta_j\\ \qquad\qquad(j=1,\cdots,n-1),\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int\left\{\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i}-h\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1}g_i(q_i,p_i)\right\}_{p_i=F_i(q_i,\alpha_i,h)}dq_i=t+\beta_n,\\ \qquad p_i=F_i(q_i,\alpha_i,h)\quad(i=1,\cdots,n)\\ \qquad\qquad(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0).\end{array}\right\}\quad(40)$$

作为特殊情况,我們得到了刘維定理:

若系統的动能和势能有如下形式:

$$T=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)\sum_{i=1}^{n}B_i\dot{q}_i^2,\quad \Pi=\frac{\sum_{i=1}^{n}\Pi_i}{\sum_{i=1}^{n}A_i},\tag{41}$$

其中 A_i, B_i 和 Π_i 只是 q_i 一个变量的函数($i=1,\cdots,n$), 則有限运动方程可用求积法得到。

事实上,对于刘維系統,

$$H=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{B_i}+2\Pi_i\right)}{2\sum_{i=1}^{n}A_i},\tag{42}$$

而这不过是公式(32)的特殊情况罢了。

§ 28. 正則变換在攝动理論中的应用

設具有給定函数 H 的系統的运动为已知,即微分方程組

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\cdots,n) \tag{1}$$

的解

$$\left.\begin{array}{l} q_i=\varphi_i(t,q_k^0,p_k^0),\ p_i=\psi_i(t,q_k^0,p_k^0) \\ [q_i^0=(q_i)_{t=0},\ p_i^0=(p_i)_{t=0};\ i=1,\cdots,n] \end{array}\right\} \tag{2}$$

是已知的，要求确定哈密頓函数为 $H+H_1$ 的"受摄"系統的运动，即微分方程組

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_i}$$

$$(i=1,\cdots,n) \tag{3}$$

的解。若将(2)式中的 q_k^0 和 $p_k^0(k=1,\cdots,n)$ 看作新变量，則如第134—135頁上所述，公式(2)便确定一自由单价正則变换，这个变换将哈密頓方程組(1)变为 $\widetilde{H}=0$ 的哈密頓方程組[見第133頁上的公式(13)]

$$\frac{dq_k^0}{dt}=0,\ \frac{dp_k^0}{dt}=0\quad (k=1,\cdots,n), \tag{4}$$

而哈密頓方程組(3)則被变换为函数 $\widetilde{H}$ 等于 H_1 的哈密頓方程組①

$$\frac{dq_k^0}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial p_k^0},\quad \frac{dp_k^0}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial q_k^0}\quad (k=1,\cdots,n). \tag{5}$$

这样，新变量 q_k^0 和 p_k^0 便具有一个絕妙的性質：对于未受摄运动，它們保持常值不变，而且就等于初始值；而对于受摄运动，它們則是时間和初始值的函数：

$$q_k^{[0]}(t,q_j^0,p_j^0),\ p_k^{[0]}(t,q_j^0,p_j^0)\quad (k=1,\cdots,n). \tag{6}$$

这些函数是作为哈密頓方程組(5)的通解被确定的，"摄动能量" H_1 乃是这个方程組的哈密頓函数。如果在未受摄运动(2)的公式

---

① 这可由关系式 $\widetilde{H}-(H+H_1)=0-H$ 来断定。这个等式左右两端都等于 $\frac{\partial S}{\partial t}$，$S$ 是所考察的自由单价正則变换的母函数(見第129頁)。

中以函数 (6) 代替常数 q_k^0 和 p_k^0，我們便得到受摄运动在原坐标 $q_i, p_i (i=1, \cdots, n)$ 中的有限方程。

利用正則变换的理論，可以将哈密頓方程組(3)的积分問題轉变为对哈密頓方程組(1)和(5)的积分；方程組(3)的通解可由組(1)和(5)的通解(2)和(6)經叠代而得，即

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \varphi_i[t, q_k^{[0]}(t, q_j^0, p_j^0), p_k^{[0]}(t, q_j^0, p_j^0)], \\ p_i &= \psi_i[t, q_k^{[0]}(t, q_j^0, p_j^0), p_k^{[0]}(t, q_j^0, p_j^0)] \\ &(i=1, \cdots, n). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

我們实际上已經指了系統的"能量受摄"和"初始数据受摄"是等价的。現在用图 40 来說明这一点。

在增广相空間的超平面 $t=0$ 上取一固定点 M_0，并由这个点引一条未受摄的正路，即方程組(1)的正路(2)。在图 40 上这条正路用粗綫 M_0N_0 表示。始点在超平面 $t=0$ 上按函数 (6) 的移动用細綫 M_0M_0' 表示。由曲綫 M_0M_0' 上的一点 M_{0t} 引一条未受摄正路 $M_{0t}N_{0t}$（这条正路在图 40 上用虛綫表示）。在这条正路上取一点 P，使之具有时刻 t 的給定坐标值。点 P 正是系統在受摄运动中于时刻 t 所在之位置。

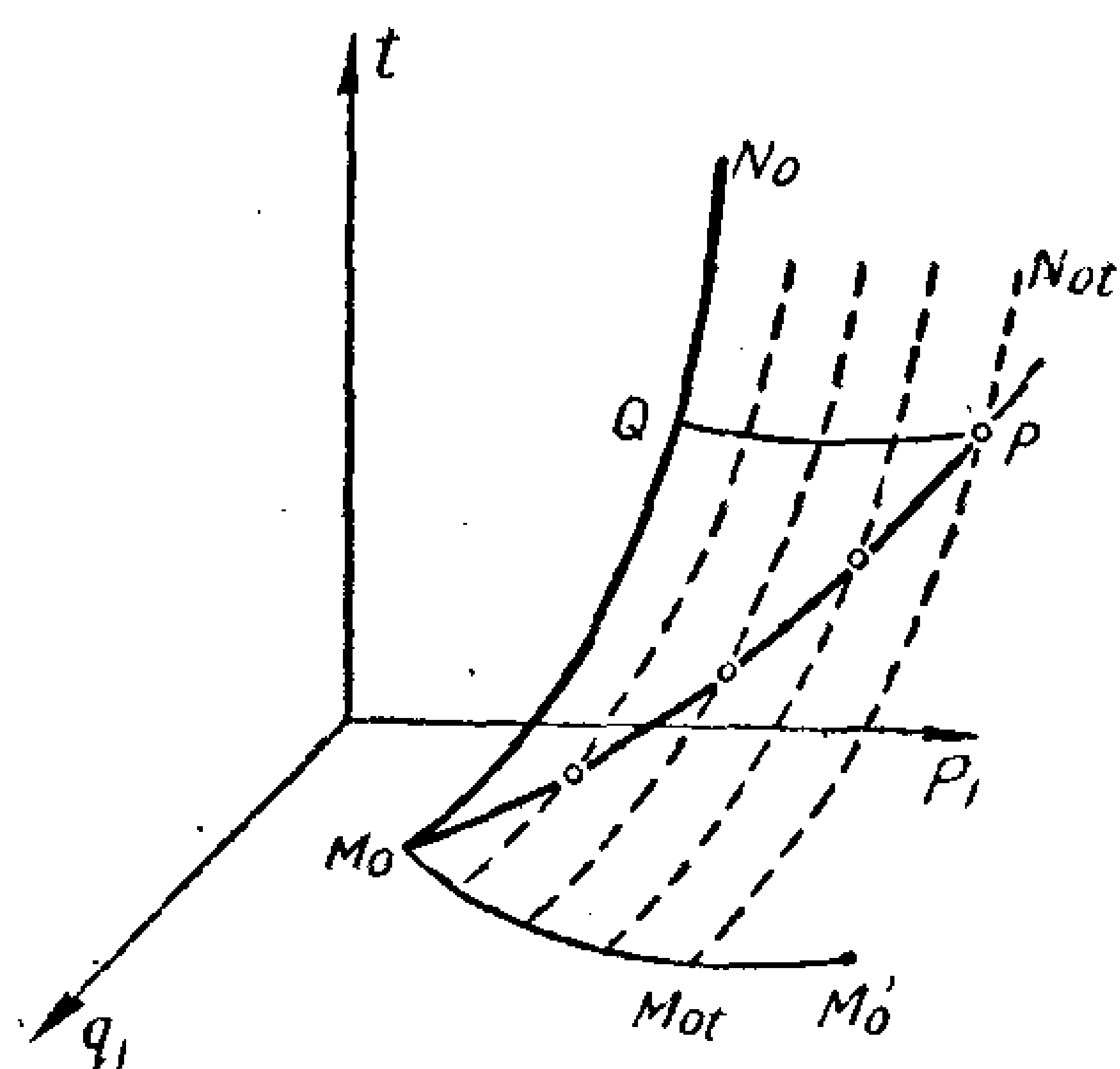


图 40.

在未受摄运动中，系統于时刻 t 所在之位置設为 Q，則摄动即表現为"移动" QP。受摄运动的正路如图上粗綫 M_0P 所示。因此，受摄运动可以看作相空間中的"复合"运动：点沿未受摄正路运动，而这条正路本身則由于初始数据的"摄动"在移动着（在一般情况下还有变形）。

§ 29. 任意正則变換的結构

在本章的这一节和以下各节，我們将給出正則变换的若干补充知識。

对于任何正則变换，一如 § 25 中对于自由正則变换所作的那样，也可以建立起一个借母函数和价 c 来决定此变换的公式。

假設在以正則变换

$$\tilde{q}_i=\varphi_i(t, q_k, p_k), \tilde{p}_i=\psi_i(t, q_k, p_k) \tag{1}$$

$$\left(i=1, \cdots, n;\ \frac{\partial(\tilde{q}_1, \cdots, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, \cdots, p_n)} \neq 0\right)$$

相互联系着的 $4n$ 个量

$$q_i, p_i, \tilde{q}_i, \tilde{p}_i (i=1, \cdots, n) \tag{2}$$

中，可以选出如下的 $2n$ 个量作为独立变量：

$$q_1, \cdots, q_l, p_{l+1}, \cdots, p_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \cdots, \tilde{p}_n \tag{3}$$

$$(0 \leqslant l,\quad m \leqslant n).$$

于是，利用恒等式

$$\sum_{g=l+1}^{n} p_g \delta q_g = \delta\left(\sum_{g=l+1}^{n} q_g p_g\right) - \sum_{g=l+1}^{n} q_g \delta p_g,$$

$$\sum_{h=m+1}^{n} \tilde{p}_h \delta \tilde{q}_h = \delta\left(\sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h \tilde{p}_h\right) - \sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h \delta \tilde{p}_h$$

便可将第 126 頁上的基本判别式(9)写成

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{p}_j \delta \tilde{q}_j - \sum_{h=m+1}^{n} \tilde{q}_h \delta \tilde{p}_h - \tilde{H} \delta t =$$

$$= c\left(\sum_{i=1}^{l} p_i \delta q_i - \sum_{g=l+1}^{n} q_g \delta p_g - H \delta t\right) - \delta U \tag{4}$$

的形式，其中

$$U=F+\sum_{h=m+1}^{n}\tilde{q}_h\tilde{p}_h-c\sum_{g=l+1}^{n}q_gp_g. \tag{5}$$

由于 $4n$ 个量(2)全都可以通过 $2n$ 个量(3)表出，所以，可以认为 U 是量(3)的函数。于是，由恒等式(4)不难得出：

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}=cp_i,\ \frac{\partial U}{\partial p_g}=-cq_g,\frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_j}=-\tilde{p}_j,\ \frac{\partial U}{\partial \tilde{p}_h}=\tilde{q}_h \tag{6}$$

$$(i=1,\cdots,l;\ g=l+1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m;\ h=m+1,\cdots,n).$$

公式(6)与公式(1)是等同的，它以价 c 和依賴于独立变量(3)的母函数 U 决定了所討論的正則变换。

下面我們要证明一个数学引理，根据这个引理，在以变换(1)相联系的 $4n$ 个量(2)中，永远可以选出 $2n$ 个独立的，且其中不包含任何一对共軛变量 q_i, p_i 或 $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$[①]。于是，在坐标 $q_i, \tilde{q}_k (i,k==1,\cdots,n)$ 和与之对应的冲量 $p_i, \tilde{p}_k (i,k=1,\cdots,n)$ 适当的編号之下，所选的 $2n$ 个独立变量便可以写成如(3)的形式。因此，对于任何正則变换都有一組公式存在，它和公式(6)只可能有量(2)編号不同的差别[②]。

一如在 § 25 中对于自由正則变换所作的那样，可以证明，对于任何正則变换，由其母函数 U 的二阶混合偏导数所組成的 n 阶行列式也是不等于零的[③]。因此，由(6)式的前 n 个方程可以将变

① 在哥尔德司坦的书(Голдстейн Г., Классическая механика, М., 1957, 第 262 頁)中，作者断言，对于任何正則变换，永远可以取以下四組量中的一組作为 $2n$ 个独立变量：q_i 和 $\tilde{q}_i$；q_i 和 $\tilde{p}_i$；p_i 和 $\tilde{q}_i$；p_i 和 $\tilde{p}_i (i=1,\cdots,n)$。这一論断是錯誤的，可由 $\tilde{q}_1=-p_1, \tilde{p}_1=q_1, \tilde{q}_j=q_j, \tilde{p}_j=p_j (j=2,\cdots,n)$ 这样一个簡单正則变换的例子看出。

② 这个論断是卡拉肖道利在他的书(Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erstes Ordnung, 2 Aufl., B. I. 1956, §96)中提出的，但是，卡拉肖道利只是就变量 q_i, p_i 到变量 $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i (i=1,\cdots,n)$ 的变换为正則的特殊情形建立了我們的证明所依賴的那个引理(見下面)。

③ 如果以 $r_1,\cdots,r_n,\tilde{r}_1,\cdots,\tilde{r}_n$ 依次表示按系列 (3) 的順序所排列的(3)中各变量，則此条件便可以写成：

$$\det\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r_i\partial \tilde{r}_k}\right)_{i,k=1}^{n}\neq 0.$$

量 $\tilde{q}_j, \tilde{p}_h (j=1, \cdots, m; h=m+1, \cdots, n)$ 解出来。将所得到的表达式代入(6)式后 n 个方程之后，我們就可以将正則变换方程(6)写成(1)的形式。

现在来陈述并证明前面所說的那个引理，它是我們得到用来构成任何正則变换的公式(6)的依据。

引理. 如果給定了依賴于 $2n$ 个独立变量 $q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n$ 的 $2n$ 个独立函数 $\tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_n, \tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n$，則由 $4n$ 个量 $q_i, p_i, \tilde{q}_i, \tilde{p}_i (i=1, \cdots, n)$ 中永远可以选出 $2n$ 个独立的，使其中不包含任何一对共軛量 (q_k, p_k) 或 $(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k)$。

证明. 若不然，也就是說，假設在所討論的諸量中，不包含任何一对共軛量的 $2n$ 个量总是不独立的。于是，我們便可由給定的 $4n$ 个量中选出这样的 $n+d$ 个独立的：其中前 n 个不带～号，后 d 个带～号，而且使这 $n+d$ 个量中沒有共軛的，同时 d 为所有可能值的最大者。按照假設，应当有 $d<n$。

由于調換二共軛量 q_i 和 p_i 或 $\tilde{q}_i$ 和 $\tilde{p}_i$ 的地位，以及对量 q_i, p_i 和 $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ 的标号 $1, \cdots, n$ 作任意置換都不改变引理的条件和結論，因此，可以认为我們选出来的就是如下的 $n+d$ 个量：

$$q_1, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d \quad (d<n). \tag{7}$$

我們将系列(7)称之为最大基底。显然，

$$\begin{gathered}\tilde{q}_j=f(q_1, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d), \\ \tilde{p}_j=f(q_1, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d) \\ (j=d+1, \cdots, n),\end{gathered} \tag{8}$$

这里 f 是表示函数关系的符号①。

无損于討論的一般性，可以认为不包含于公式(8)的諸量

$$p_1, \cdots, p_n, \tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_d$$

中，量

$$p_1, \cdots, p_a, \tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_b \quad (a \leqslant n, b \leqslant d) \tag{9}$$

是基底(7)的函数，而量

$$p_{a+1}, \cdots, p_n, \tilde{p}_{b+1}, \cdots, \tilde{p}_d \tag{10}$$

中的每一个都与基底无关。因此，

$$\left.\begin{aligned} p_i&=f(q_1, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d) \quad (i=1, \cdots, a), \\ \tilde{p}_k&=f(q_1, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d) \quad (k=1, \cdots, b). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

①在不同的公式中，同一个字母 f 表示不同的函数关系。

現在我們指出，与"独立"量(10)共軛的量 $q_{a+1}, \cdots, q_n, \tilde{q}_{b+1}, \cdots, \tilde{q}_d$ 实际上不包含在(8)式的右端。事实上，如果 $q_\lambda(\lambda>a)$ 眞包含在某个 $\tilde{q}_j\,(j>d)$的表达式中：

$$\tilde{q}_j=f(\cdots, q_\lambda, \cdots),$$

則量組 $q_1, \cdots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$ 便与基底(7)是等价的：

$$\begin{aligned}&(q_1, \cdots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j)\backsim\\&\backsim(q_1, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d),\end{aligned}\tag{12}$$

即两組量的任一組中的每一个量都可以通过另一組量来表示，反之亦然[①]。因此 $n+d+1$ 个量

$$q_1, \cdots, q_{\lambda-1}, p_\lambda, q_{\lambda+1}, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$$

是独立的，这与基底(7)的"最大性"矛盾。

因此，公式(8)可以写成：

$$\begin{aligned}&\tilde{q}_j=f(q_1, \cdots, q_a, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_b),\\&\tilde{p}_j=f(q_1, \cdots, q_a, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_b)\quad(j=d+1, \cdots, n).\end{aligned}\tag{13}$$

今以 $q_1, \cdots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_{b_1}\,(a_1\leqslant a,\ b_1\leqslant b)$ 表示眞正包含在公式(13)右端那些量的全体(那怕只出現在某一个式子的右端也罢)。于是，

$$\begin{aligned}&\tilde{q}_j=f(q_1, \cdots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_{b_1}),\\&\tilde{p}_j=f(q_1, \cdots, q_{a_1}, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_{b_1})\quad(j=d+1, \cdots, n).\end{aligned}\tag{14}$$

我們現在来指出，量 q_λ，$\tilde{q}_\mu(\lambda>a,\ \mu>b)$实际上并不包含在(11)式那些 $i\leqslant a_1, k\leqslant b_1$ 的各式中。假若不是这样。例如，設 $q_\lambda(\lambda>a)$眞包含在　(11)式 p_{i_1} 的表达式中$(i_1\leqslant a_1)$：

$$p_{i_1}=f(\cdots, q_\lambda, \cdots)\quad(i_1\leqslant a_1, \lambda>a).$$

但量 q_{i_1} 肯定是包含在表达式(14)的某一个之中的；例如，設 q_{i_1} 包含在 $\tilde{q}_j(j>d)$的表达式中：

$$\tilde{q}_j=f(\cdots, q_{i_1}, \cdots)\quad(i_1\leqslant a_1, j>d).$$

于是，

$$\begin{aligned}&(q_1, \cdots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \cdots, q_{\lambda-1}, q_{\lambda+1}, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j)\backsim\\&\backsim(q_1, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d),\end{aligned}\tag{15}$$

因之，$n+d+1$ 个量

$q_1, \cdots, q_{i_1-1}, p_{i_1}, q_{i_1+1}, \cdots, q_{\lambda-1}, p_\lambda, q_{\lambda+1}, \cdots, q_n, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_d, \tilde{q}_j$ 是独立的，这和

---

① 如果 q_λ 眞包含在某个函数关系式中，則由这个关系式便可以将 q_λ 解出来。

基底(7)的“最大性”矛盾。

因此,

$$p_{i_1}=f(q_1,\cdots,q_a,\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_b),$$
$$\tilde{p}_{k_1}=f(q_1,\cdots,q_a,\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_b)$$
$$(i_1=1,\cdots,a_1,k_1=1,\cdots,b_1). \tag{16}$$

今以 $q_{a_1+1},\cdots,q_{a_2},\tilde{q}_{b_1+1},\cdots,\tilde{q}_{b_2}$ 表示量 q_i, $\tilde{q}_k(i>a_1,\ k>b_1)$中眞正包含在(16)式右端的那些量。于是,

$$\left.\begin{array}{l}p_{i_1}=f(q_1,\cdots,q_{a_2},\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_2})(i_1=1,\cdots,a_1;a_1\leqslant a_2\leqslant a),\\ \tilde{p}_{k_1}=f(q_1,\cdots,q_{a_2},\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_2})(k_1=1,\cdots,b_1;b_1\leqslant b_2\leqslant b).\end{array}\right\} \tag{17}$$

我們現在指出,量 $q_\lambda,\tilde{q}_\mu(\lambda>a,\mu>b)$实际上不包含在$i\leqslant a_2,k\leqslant b_2$ 的 p_i, $\tilde{p}_k$ 的表达式(11)中。事实上,例如,設 $q_\lambda(\lambda>a)$眞包含在 $p_{i_2}(a_1<i_2\leqslant a_2)$的表达式中:

$$p_{i_2}=f(\cdots,q_\lambda,\cdots)\quad(a_1<i_2\leqslant a_2,\lambda>a).$$

但由于 q_{i_2} 确实包含在(17)的某一表达式中,例如在 p_{i_1} 的表达式中。于是,量 q_{i_1} 确实包含在(14)的某一个表达式中,例如,就在 $\tilde{q}_j(j>d)$的表达式中,即:

$$p_{i_1}=f(\cdots,q_{i_2},\cdots)\quad(i_1\leqslant a_1<i_2\leqslant a_2),$$
$$\tilde{q}_j=f(\cdots,q_{i_1},\cdots)\quad(i_1\leqslant a_1,j>d).$$

在这情况下,如下的一組量:

$$q_1,\cdots,q_{i_1-1},p_{i_1},q_{i_1+1},\cdots,q_{i_2-1},p_{i_2},q_{i_2+1},\cdots,q_{\lambda-1},$$
$$q_{\lambda+1},\cdots,q_n,\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_d,\tilde{q}_j \tag{18}$$

便和基底(7)等价。因此,p_λ 和量組(18)无关。把 p_λ 添到量組(18)中,便得到由 $n+d+1$ 个量构成的基底,这是不可能的。

因此,

$$p_{i_2}=f(q_1,\cdots,q_a,\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_b),\tilde{p}_{k_2}=f(q_1,\cdots,q_a,\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_b)$$
$$(i_2=a_1+1,\cdots,a_2;k_2=b_1+1,\cdots,b_2). \tag{19}$$

現在以 $q_{a_2+1},\cdots,q_{a_3},\tilde{q}_{b_2+1},\cdots,\tilde{q}_{b_3}$ 表示 $q_i,\tilde{q}_k(i>a_2,k>b_2)$中那些眞包含在公式(19)里的各个量。等式(19)可以写成:

$$\left.\begin{array}{l}p_{i_2}=f(q_1,\cdots,q_{a_3},\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_3})\\ \qquad(i_2=a_1+1,\cdots,a_2;a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a),\\ \tilde{p}_{k_2}=f(q_1,\cdots,q_{a_3},\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_3})\\ \qquad(k_2=b_1+1,\cdots,b_2;b_1\leqslant b_2\leqslant b_3\leqslant b).\end{array}\right\} \tag{20}$$

这个过程可以一直继續下去，直到同时得到等式 $a_s=a_{s+1}$, $b_s=b_{s+1}$ 为止。于是，

$$
\left.\begin{aligned}
p_{i_s}&=f(q_1,\cdots,q_{a_s},\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_s})\\
&\qquad(i_s=a_{s-1}+1,\cdots,a_s;\ a_1\leqslant\cdots\leqslant a_s\leqslant a),\\
\tilde{p}_{k_s}&=f(q_1,\cdots,q_{a_s},\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_s})\\
&\qquad(k_s=b_{s-1}+1,\cdots,b_s;\ b_1\leqslant\cdots\leqslant b_s\leqslant b).
\end{aligned}\right\}\tag{21}
$$

代替公式(14), (17), (20), …, (21)則有*:

$$
\left.\begin{aligned}
\tilde{q}_j&=f(q_1,\cdots,q_{a_s},\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_s})\\
\tilde{p}_j&=f(q_1,\cdots,q_{a_s},\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_s})
\end{aligned}\right\}\quad(j=d+1,\cdots,n),\tag{22}
$$

$$
p_i=f(q_1,\cdots,q_{a_s},\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_s})\quad(i=1,\cdots,a_s),\tag{23}
$$

$$
\tilde{p}_k=f(q_1,\cdots,q_{a_s},\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_s})\quad(k=1,\cdots,b_s).\tag{24}
$$

現在假設 $a_s>b_s$。于是由公式(23)可以消去 $\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_{b_s}$ 并得到 q_i, p_i 之間的相关关系，这和引理的条件矛盾。

如果 $a_s\leqslant b_s$，則 $a_s<b_s+1$。于是，由公式(22)和(24)可以消去所有的 q_i，并得到 $\tilde{q}_k$, $\tilde{p}_k$ 之間的相关关系，这仍然和引理条件矛盾。

因此，$d<n$ 的最大基底(7)存在的假定和引理条件是矛盾的。引理得证。

§ 30. 变换的正則性准則·拉格朗日括弧

我們来建立几个正則性准則，即由 q_k, p_k $(k=1,\cdots,n)$ 的 $2n$ 个独立函数

$$
\tilde{q}_i=\varphi_i(t,q_k,p_k);\ \tilde{p}_i=\psi_i(t,q_k,p_k)\quad(i=1,\cdots,n)\tag{1}
$$

所定义的变换为正則变换时，函数(1)所应满足的必要充分条件。

設变换(1)是正則的。它的判别式为:

$$
\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\delta\tilde{q}_i-\tilde{H}\delta t=c\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t\right)-\delta F(t,q_i,p_i).\tag{2}
$$

令 $t=\bar{t}$（$\bar{t}$ 是任一固定值），則由恒等式(2)得:

$$
\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\delta\tilde{q}_i=c\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-\delta F(\bar{t},q_i,p_i).\tag{3}
$$

但等式(3)乃是关于不显含时間的变换:

---

* 因为 $a_s\geqslant a_1$, $b_s\geqslant b_1$，所以，(14)式可以形式地写作(22)式。直接用(14)式也无不可。——譯者注

$$\tilde{q}_i=\varphi_i(\bar{t}, q_k, p_k), \tilde{p}_i=\psi_i(\bar{t}, q_k, p_k) \quad (i=1, \cdots, n) \tag{4}$$

的判別恒等式。因之，公式(4)决定一 c 价正則变换，且 c 与所选值 $t=\bar{t}$ 无关。

反之，假設以不同固定值 $\bar{t}$ 替代变换(1)的变量 t 而得到的变换全都是同价正則的(价为 c)，則以等式

$$\widetilde{H}=cH+\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} \tag{5}$$

規定函数 $\widetilde{H}$ 时，我們由等式(3)和(5)便得到等式(2)，这表明依賴于时間 t 的变换(1)是正則的。

因此，使依賴于时間的变换(1)是正則变换的必要充分条件是：以任何值 $\bar{t}$ 替代变换(1)中的 t 时，所得到的不依賴于时間的变换全都是正則的，而且有同样的价 c。

因之，在建立正則性准則时，可以只限于不显含时間变量 t 的正則变换：

$$\tilde{q}_i=\varphi_i(q_k, p_k), \tilde{p}_i=\psi_i(q_k, p_k)$$

$$\left(i=1, \cdots, n; \frac{\partial(\tilde{q}_1, \cdots, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, \cdots, p_n)}\neq 0\right). \tag{6}$$

正則变换(6)的判别恒等式(2)可以写成：

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{p}_k\delta\tilde{q}_k=c\sum_{k=1}^{n}p_k\delta q_k-\delta K(q_k, p_k). \tag{7}$$

在此利用公式(1)将 $\delta\tilde{q}_k$ 以 δq_i 和 δp_i 表出，則等式(7)便具有如下形式：

$$\sum_{i=1}^{n}(\Phi_i\,\delta q_i+\Psi_i\,\delta p_i)=-\delta K(q_k, p_k), \tag{8}$$

其中

$$\Phi_i=\sum_{k=1}^{n}\tilde{p}_k\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_i}-cp_i, \quad \Psi_i=\sum_{k=1}^{n}\tilde{p}_k\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_i}$$

$$(i=1, \cdots, n). \tag{8'}$$

写出等式(8)左端是全微分的条件，我們便得到如下形式的正則性准則：

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial q_k}=\frac{\partial\Phi_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial\Psi_i}{\partial p_k}=\frac{\partial\Psi_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial\Phi_i}{\partial p_k}=\frac{\partial\Psi_k}{\partial q_i}$$

$$(i, k=1, \cdots, n). \tag{9}$$

将表达式(8')代入上式，經簡单变换后便得到：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_k}-\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_k}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\right)=0,\\&\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial p_k}-\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial p_i}\right)=0,\\&\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial p_k}-\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\right)=c\,\delta_{ik}\\&\qquad(i,k=1,\cdots,n),\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

其中 δ_{ik} 是克朗尼克符号：当 $i\neq k$ 时，$\delta_{ik}=0$；当 $i=k$ 时，$\delta_{ik}=1$

$$(i,k=1,\cdots,n).$$

如果引入所謂拉格朗日括弧，則条件(10)便可以写得更为緊湊些。对于两个变量 q 和 p 的 $2n$ 个已知函数 $\varphi_i,\psi_i(i=1,\cdots,n)$，拉格朗日括弧定义为如下的表达式①：

$$[qp]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial q}\frac{\partial\psi_j}{\partial p}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial p}\frac{\partial\psi_j}{\partial q}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\varphi_j\psi_j)}{\partial(q,p)}.\tag{11}$$

利用这些括弧，并将公式(6)所确定的函数 $\tilde{q}_i,\tilde{p}_i(i=1,\cdots,n)$ 取作 φ_i,ψ_i，則条件(10)便可以写成

$$[q_iq_k]=0,\quad[p_ip_k]=0,\quad[q_ip_k]=c\,\delta_{ik}\qquad(i,k=1,\cdots,n);\tag{12}$$

这里 c 是正則变换的价。

等式(12)給出了变换(6)是正則变换的必要充分条件。在变换依賴于时間 t 的情况下，条件(12)仍然是正确的，只要它对任何 t 值都滿足。

§31. 正則变换雅科毕矩陣的耦对性

我們来看正則变换的雅科毕矩陣：

---

① 建議讀者将拉格朗日括弧和 §15 中所引入的泊松括弧加以比較。在那里是給定了 $2n$ 个变量 q_i,p_i 的两个函数 φ,ψ，泊松括弧乃是雅科毕行列式 $\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(q_i,p_i)}$ 之和。而这里却是給定了 $2n$ 个依賴于两个变量的函数，拉格朗日括弧乃是雅科毕行列式之和(11)。

$$M=\begin{Vmatrix}\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial q_n}\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial p_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial q_n}\frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial\tilde{q}_n}{\partial p_n}\\ \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial q_n}\frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial p_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial q_n}\frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial\tilde{p}_n}{\partial p_n}\end{Vmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\\ \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\end{Bmatrix}. \tag{1}$$

这里$\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}$是 n 阶雅科毕矩陣$\left\|\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_k}\right\|$。可以类似地来定义 n 阶雅科毕矩陣 $\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}$,

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\text{和}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}.$$

我們在討論中引入一个特殊的 $2n$ 阶矩陣:

$$J=\begin{Vmatrix}0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1\\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\end{Vmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 E 是 n 阶单位矩陣。令 M' 表示矩陣 M 的轉置矩陣, 則由前节中的关系式(12)可以证明乘积 $M'JM$ 恒等于 cJ:

$$M'JM=cJ, \tag{3}$$

其中 c 是正則变换的价。

事实上①,

$$M'J=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\right)' & \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\right)'\\ \left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\right)' & \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\right)'\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\right)' & -\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\right)'\\ \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\right)' & -\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\right)'\end{bmatrix},$$

---

① 在矩陣元素为矩陣块的情况下, 其乘法規則和矩陣元素为数的情况完全相同, 即第一个矩陣因子的行乘第二个矩陣因子的列(可参考 Гантмахер Ф. Р., 矩陣論 §5——有中譯本)。

$$M'JM=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}-\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} & \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}-\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\\ \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}-\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} & \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}-\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\right)'\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\end{bmatrix}.$$

但是，

$$\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}-\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\right)'\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}=$$

$$=\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_k}-\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_k}\right\|_{i,k=1}^{n}=\left\|[q_i,q_k]\right\|=0.$$

对于其余的三块也作类似的計算，最后就得到：

$$M'JM=\begin{pmatrix}0 & -cE\\ cE & 0\end{pmatrix}=cJ.$$

证毕。

对于单价正则变换，等式(3)可以写成：

$$M'JM=J. \tag{4}$$

滿足等式(4)的矩陣 M 称为耦对矩陣。由于 $\det J=1$，同时矩陣乘积的行列式又等于各相乘矩陣的行列式之积，因之，由(4)式便有：

$$\det M=\pm1.$$

因此，耦对矩陣是非奇异的①。

滿足关系式(3)的矩陣 M 称为 c 价的广义耦对矩陣②。

因为前节中的关系式(12)归結为雅科毕矩陣 M 的广义耦对性条件，所以变换的**正则性准则**可以这样来表述：

为使某变换 $\tilde{q}_i=\tilde{q}_i(t,q_k,p_k)$, $\tilde{p}_i=\tilde{p}_i(t,q_k,p_k)$ $(i=1,\cdots,n)$ 成为正则

---

① 不难驗证：二耦对矩陣之积、任一耦对矩陣之逆以及单位矩陣都仍然是耦对矩陣。因此，耦对矩陣构成一个群——耦对群。

耦对矩陣的主要特征是：使双綫性型 $f=\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i'-y_ix_i')$ 中的 $2n$ 个变量 x_i, y_i 和 $2n$ 个变量 x_i', y_i' 經受同一个系数矩陣为耦对矩陣 M 的綫性变换之后，型 f 在新变量 x_i^*, y_i^* 和 $x_i^{*\prime}$, $y_i^{*\prime}$ 中仍保持其原有形式：$f=\sum_{i=1}^{n}(x_i^*y_i^{*\prime}-y_i^*x_i^{*\prime})$。

② 全体广义耦对矩陣(当所有的 $c\neq0$ 时)也构成一个群。如果M是广义耦对矩陣，则 $\det M=\pm c^n$。

变换的必要充分条件是：对应于这个变换的雅科毕矩陣 M 是具有常数价 c 的广义耦对矩陣（在单价变换的情况下，矩陣 M 是普通耦对的）。同时，耦对性条件(3)对于全体变量 $t, q_i, p_i(i=1, \cdots, n)$ 应当恒等地被滿足。

§32. 正则变换下泊松括弧的不变性

現在把写成上节等式(3)形式的变换的正則性条件稍微改变一下。將此等式两端左乘以 $(M')^{-1}$，再右乘以 M^{-1}，即得：

$$(M')^{-1}JM^{-1}=\frac{1}{c}J. \tag{1}$$

取上式两端的逆矩陣，并注意到 $J^{-1}=-J$①，我們便有：

$$MJM'=cJ. \tag{2}$$

将等式 $M'JM=cJ$ 中的雅科毕矩陣 M 以其轉置矩陣 M' 来替代，便得到等式(2)。但这样的替代[見 §31 公式(1)]归結为将导数 $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_k}$, $\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_k}$ 分别换成导数 $\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial q_i}$, $\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i}$, $\frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial p_i}$，也就是把各个导数上下两个字母連同其标号相互对調②。因此，如果等式 $M'JM=cJ$ 和如下的一組等式等价：

$$[q_iq_k]=0,\quad [p_ip_k]=0,\quad [q_ip_k]=c\delta_{ik}$$
$$(i, k=1, \cdots, n), \tag{3}$$

則等式(2)便等价于等式組：

$$[q_iq_k]^*=0,\quad [p_ip_k]^*=0,\quad [q_ip_k]^*=c\delta_{ik}$$
$$(i, k=1, \cdots, n), \tag{4}$$

其中 * 号表示在拉格朗日括弧中須作如上所述的导数替換。而这样一来，拉格朗日括弧就变成了泊松括弧。事实上，

---

① 我們在这里利用了以下的規則：矩陣乘积的逆矩陣等于各相乘矩陣的逆矩陣按相反順序相乘：$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$。此外，

$$J^2=\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-E & 0\\ 0 & -E\end{pmatrix},$$

即矩陣 $-J^2$ 等于 $2n$ 阶单位矩陣。由此即得 $J^{-1}=-J$。

（原书这里有誤，譯文已作更正。——譯者注）

② ～号仍然留在上面。

$$[q_i q_k]^* = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_k}-\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_k}\right)\right]^*$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial q_j}\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_j}-\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial p_j}\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_j}\right)=(\tilde{q}_i\tilde{q}_k),$$

其中$(\tilde{q}_i\tilde{q}_k)$乃是函数 $\tilde{q}_i$ 和 $\tilde{q}_k$ 关于独立变量 $q_1, p_1, \cdots, q_n, p_n$ 的泊松括弧。完全类似地有：

$$[p_i\, p_k]^* = (\tilde{p}_i\, \tilde{p}_k),\quad [q_i\, p_k]^* = (\tilde{q}_i\, \tilde{p}_k).$$

因此，利用泊松括弧可以将变换的正則性条件(4)写成如下形式：

$$(\tilde{q}_i\tilde{q}_k)=0,\quad (\tilde{p}_i\tilde{p}_k)=0,\quad (\tilde{q}_i\tilde{p}_k)=c\,\delta_{ik}$$
$$(i, k=1, \cdots, n). \tag{5}$$

現在来考察依賴于量 $q_i, p_i (i=1, \cdots, n)$ 和 t 的二函数 φ 和 ψ。将这两个函数中的 $q_i, p_i\ (i=1, \cdots, n)$ 借逆正則变換通过 $\tilde{q}_k,\ \tilde{p}_k\ (k=1, \cdots, n)$ 来表示，則此二函数便可以看作变量 $\tilde{q}_k, \tilde{p}_k (k=1, \cdots, n)$的函数。我們以$(\varphi\psi)$和$(\varphi\psi)^\sim$分别表示函数 φ, ψ 关于变量 q_i, p_i 和 $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ 的泊松括弧。

現在来证明如下的恒等式成立：

$$(\varphi\psi)=c(\varphi\psi)^\sim. \tag{6}$$

这个恒等式的证明有賴于著名的复合函数組雅科毕行列式

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(q_j,p_j)}=\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n}\left[\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\tilde{q}_i,\tilde{q}_k)}\frac{\partial(\tilde{q}_i,\tilde{q}_k)}{\partial(q_j,p_j)}+\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\tilde{p}_i,\tilde{p}_k)}\frac{\partial(\tilde{p}_i,\tilde{p}_k)}{\partial(q_j,p_j)}\right]+$$
$$+\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\tilde{q}_i,\tilde{p}_k)}\frac{\partial(\tilde{q}_i,\tilde{p}_k)}{\partial(q_j,p_j)}\quad (j=1, \cdots, n).$$

将这些恒等式逐項相加即得：

$$(\varphi\psi)=\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n}\left[\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\tilde{q}_i,\tilde{q}_k)}(\tilde{q}_i\tilde{q}_k)+\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\tilde{p}_i,\tilde{p}_k)}(\tilde{p}_i\tilde{p}_k)\right]+$$
$$+\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\tilde{q}_i,\tilde{p}_k)}(\tilde{q}_i\tilde{p}_k).$$

根据等式(5)，由此便有：

$$(\varphi\psi)=c\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\tilde{q}_j,\tilde{p}_j)}=c(\varphi\psi)^\sim. \tag{7}$$

相反的論断也是正确的。如果对于任意的两个函数 φ 和 ψ，在同一个常数 $c\neq 0$ 之下，恒等式(7)被滿足，則由 $2n$ 个变量 q_i, p_i 到 $2n$ 个变量 $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i$ 的变换是 c 价正則变换①。

对于单价正則变换，$c=1$，因之

$$(\varphi\psi)=(\varphi\psi)^{\sim}.$$

换句話說，对于单价正則变换，泊松括弧是不变的。单价正則变换的这个性质是这类变换有别于相空間中一切可能变换的标志。

---

① 事实上，由等式(7)便有

$$(\tilde{q}_i\tilde{q}_k)=c(\tilde{q}_i\tilde{q}_k)^{\sim}=0,\ (\tilde{p}_i\tilde{p}_k)=c(\tilde{p}_i\tilde{p}_k)^{\sim}=0,$$

$$(\tilde{q}_i\tilde{p}_k)=c(\tilde{q}_i\tilde{p}_k)^{\sim}=c\delta_{ik}.$$

第五章　系統的平衡稳定性及其运动稳定性

§ 33. 关于平衡位置稳定性的拉格朗日定理

我們从稳定平衡位置的定义开始。

首先回忆一下什么是系統的平衡位置[①]。如果在初始时刻，系統以等于零的速度处于某位置，而后永远停留在該位置上，則这个位置称为系統的平衡位置。

設完整系統的位置由独立坐标 $q_1, \cdots, q_n$（n 是系統的自由度）来确定。如 § 5 中所述，在平衡位置（且仅在此位置）所有广义力为零：$Q_i=0(i=1, \cdots, n)$[②]。无損于討論的一般性，可以认为系統的平衡位置在坐标原点 $q_1=\cdots=q_n=0$。于是，系統在任何其它位置的坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 便表示出这个位置离开平衡位置的偏差，而这些坐标本身也就称为系統的偏差。

若在足够小的初始偏差 q_i^0 和足够小的初始速度 $\dot{q}_i^0$ $(i=1, \cdots, n)$ 之下，系統在整个运动时間里不越出平衡位置的某一（預先給定的！）任意小邻域的边界，并有任意小的速度 $\dot{q}_i(i=1, \cdots, n)$，則平衡位置 $q_1=\cdots=q_n=0$（或平衡状态 $q_1=\cdots=q_n=0, \dot{q}_1=\cdots=\dot{q}_n==0$）称为稳定平衡位置，即在稳定平衡位置上，对于任何 $\varepsilon>0$，可指出 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当在初始时刻 $t=t_0$，

---

① 見 § 4。

② 若广义力 Q_i 不仅和坐标 q_k 有关，而且也和广义速度 $\dot{q}_k$ $(k=1, \cdots, n)$ 有关时，則当平衡位置的坐标代替 Q_i 中的坐标 q_k，同时令其中的广义速度为零时，等式 $Q_i=0$ 成立。

$$|q_i^0|<\delta, |\dot{q}_i^0|<\delta \quad (i=1, \cdots, n) \tag{1}$$

时，不等式

$$|q_i(t)|<\varepsilon, |\dot{q}_i(t)|<\varepsilon \quad (i=1, \cdots, n) \tag{2}$$

对于一切 $t \geqslant t_0$ 成立。

在 $2n$ 維状态空間*$(q_i, \dot{q}_i)$里很便于对不等式(1)和(2)作几何学的解釋。图 41 上(对于 $n=1$ 的情况)划出了 $(q, \dot{q})$ 平面上坐标原点 O 的两个邻域，它們分別对应于不等式(1)和(2)。若原点 O是稳定平衡状态，則对于給定的 $\varepsilon>0$，当适当地选取 $\delta>0$ 时，于时刻 t_0 从以 O 为中心、2δ 为边长的正方块內开始的任何运动将永远保留在以 O 为中心、2ε 为边长的正方块內。

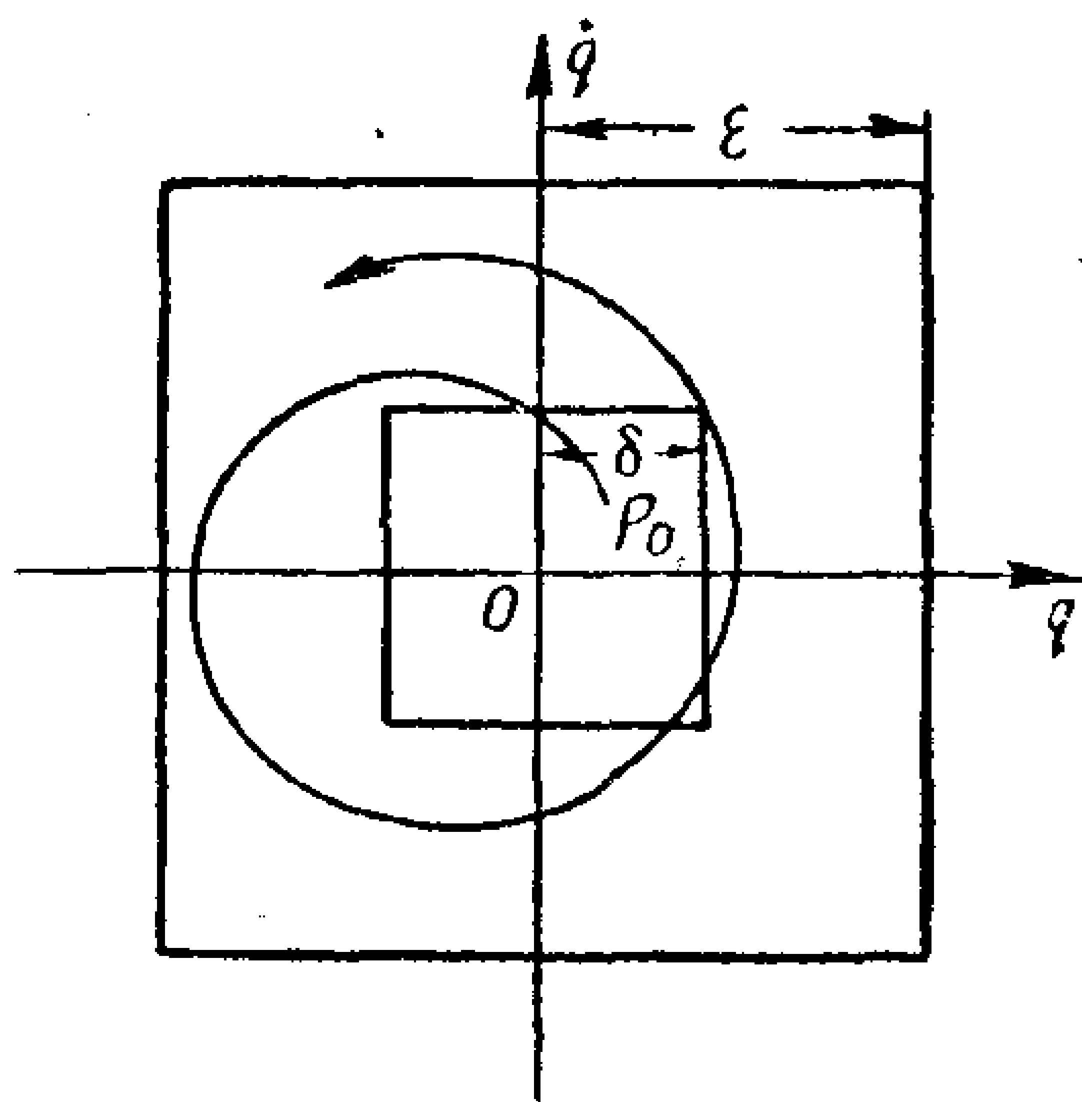


图 41.

例题 1. 重球沿位于鉛直平面內的圓形輪圈运动。此时有两个平衡位置：輪圈的最低点和最高点。其中第一个是稳定平衡位置，第二个是不稳定的平衡位置。

2. 綫性振子。平衡位置是稳定的。事实上，对于綫性振子，$T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2$，$\Pi=\frac{1}{2}cq^2\ (m>0, c>0)$，且其运动微分方程 $m\ddot{q}+cq=0$ 有通解

$$q=q_0\cos\omega(t-t_0)+\frac{\dot{q}_0}{\omega}\sin\omega(t-t_0) \quad \left(\omega^2=\frac{c}{m}\right).$$

因此，对于給定的 ε，例如取，$\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{2\omega}, \frac{\omega\varepsilon}{2}\right)$时，只要$|q_0|<\delta$，$|\dot{q}_0|<\delta$，就有

$$|q(t)|\leqslant|q_0|+\frac{1}{\omega}|\dot{q}_0|<\varepsilon, |\dot{q}(t)|\leqslant\omega|q_0|+|\dot{q}_0|<\varepsilon.$$

3. 质量为m的质点在下述二力作用下沿 x 軸的运动：与偏差成正比的恢复力 $-cx$ 和与速度一次方成正比的介质阻力 $-2f\dot{x}\,(c>0, f>0)$。

* 状态空間是指空間$(q_i, \dot{q}_i)$；相空間是指空間(q_i, p_i)。——譯者注

点 $x=0$ 是稳定平衡位置。我們先看小阻力系数的情况：$0<f<\sqrt{mc}$。在此情况下，运动微分方程 $m\ddot{x}+2f\dot{x}+cx=0$ 有如下的通解：

$$x=e^{-\frac{f}{m}(t-t_0)}\left[C_1\cos\frac{d}{m}(t-t_0)+C_2\sin\frac{d}{m}(t-t_0)\right],$$

其中 $d=\sqrt{mc-f^2}$，$C_1=x_0$，$C_2=\frac{1}{d}(fx_0+m\dot{x}_0)$.

由此可知，对于任何 t 值，都有

$$|x(t)|\leqslant|C_1|+|C_2|\leqslant\left(1+\frac{f}{d}\right)|x_0|+\frac{m}{d}|\dot{x}_0|<\varepsilon$$

和

$$|\dot{x}(t)|\leqslant\frac{d}{m}\left(1+\frac{f}{d}\right)(|C_1|+|C_2|)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d}{m}\left(1+\frac{f}{d}\right)^2|x_0|+\left(1+\frac{f}{d}\right)|\dot{x}_0|<\varepsilon,$$

只要 $|x_0|<\delta$，$|\dot{x}_0|<\delta$，其中可以取

$$\delta=\min\left[\frac{d\varepsilon}{2m},\ \frac{m\varepsilon}{2d\left(1+\frac{f}{d}\right)^2}\right].$$

若 $f\geqslant\sqrt{mc}$，则运动微分方程 $m\ddot{x}+2f\dot{x}+cx=0$ 的通解有如下形式：

$$x=C_1e^{-\nu_1(t-t_0)}+C_2e^{-\nu_2(t-t_0)},$$

其中

$$\nu_{1,2}=\frac{f\pm\sqrt{f^2-mc}}{m}>0,\ C_1=\frac{\nu_2x_0+\dot{x}_0}{\nu_2-\nu_1},$$

$$C_2=\frac{\nu_1x_0+\dot{x}_0}{\nu_1-\nu_2}.$$

由此可知，对于任何 t 值，都有

$$|x(t)|\leqslant|C_1|+|C_2|\leqslant\frac{(\nu_1+\nu_2)|x_0|+2|\dot{x}_0|}{|\nu_2-\nu_1|}=\frac{f|x_0|+m|\dot{x}_0|}{\sqrt{f^2-mc}}<\varepsilon$$

和

$$|\dot{x}(t)|\leqslant\nu_1|C_1|+\nu_2|C_2|\leqslant\frac{2\nu_1\nu_2|x_0|+(\nu_1+\nu_2)|\dot{x}_0|}{|\nu_2-\nu_1|}=$$

$$=\frac{c|x_0|+f|\dot{x}_0|}{\sqrt{f^2-mc}}<\varepsilon,$$

只要 $|x_0|<\delta$，$|\dot{x}_0|<\delta$，其中

$$\delta=\min\left(\frac{\sqrt{f^2-mc}}{2f}\varepsilon,\frac{\sqrt{f^2-mc}}{2c}\varepsilon,\frac{\sqrt{f^2-mc}}{2m}\varepsilon\right).$$

在例2和例3中，平衡位置的稳定性是利用对系統运动微分方程进行积分而得到的有限方程来确定的。这些有限运动方程向我們提供了偏差 q_i 和广义速度 $\dot{q}_i$ 与时間 t 和初始数据 $q_i^0, \dot{q}_i^0 (i==1, \cdots, n)$ 之間的关系。但是，在較复杂的(特别是非綫性的)問題中，要确定并研究这些有限运动方程是极为困难的。因此，那些无需事先对系統的运动微分方程进行积分，就能判定平衡位置的稳定性的准則是很有价值的。

托里拆利早在1644年就已經知道，在重力作用下的物体系統，当其重心处于可能的最低位置时，系統所在位置是稳定的。拉格朗日将托里拆利的这一原理推广到任意的有势力情况，并建立了保守系統平衡位置稳定性的准則如下：

拉格朗日定理[①]。如果在某一位置，保守系統的势能有严格极小值，則此位置是系統的稳定平衡位置。

证明. 无損于一般性，可以认为在所討論的位置上，全体坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 和势能 $\Pi(q_1, \cdots, q_n)$ 都等于零，即 $q_1=\cdots=q_n=0$, $\Pi(0, \cdots, 0)=0$[②]。因为在給定的系統位置上，函数 Π 有极小值，故在此位置广义力等于零：

$$Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=0 \quad (i=1, \cdots, n),$$

即点 $q_1=\cdots=q_n=0$ 是系統的平衡位置。其次，由 $\Pi(0, \cdots, 0)=0$ 是严格极小值可知，在平衡位置的某一 Δ 邻域

$$|q_i|<\Delta \quad (i=1, \cdots, n) \tag{3}$$

内，只要所有坐标 q_i 不同时为零，就有严格的不等式：

① 在拉格朗日的“分析力学”(1788年第一版)一书中有此定理，但定理的严格证明最先是由勒襄·狄利赫里給出的。因此，常常将这个定理称为勒襄·狄利赫里定理。

② 势能 Π 的确定只能精确到任意可加常数。适当选擇这个常数，就可以使 Π 在平衡位置等于零。

$$\Pi(q_1, \cdots, q_n) > \Pi(0, \cdots, 0) = 0 \tag{4}$$

成立。

今写出总能量表达式如下：

$$E(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n) = T + \Pi =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \cdots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k + \Pi(q_1, \cdots, q_n). \tag{5}$$

根据不等式(4)以及当广义速度 $\dot{q}_i$ 不全为零时便有 $T>0$[①]可以断定，在滿足不等式(3)的条件下，只要所有的 $2n$ 个量 $q_i, \dot{q}_i (i = 1, \cdots, n)$ 不同时为零，总有

$$E > 0,$$

即在 $2n$ 維状态空間的坐标原点 O，其值为零的总能量 $E(q_i, \dot{q}_i)$ 在該点有严格极小值(等于零)。

在 O 与 Δ 之間任取一数 $\varepsilon: 0<\varepsilon<\Delta$，我們来看在按不等式

$$|q_i| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i| < \varepsilon \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{6}$$

所确定的 ε 邻域的边界上总能量 E 的値(图 42)。由于此边界为一閉的点集，故連續函数 E 必在此边界上达到自己的极小值 E^*。又因为在 ε 邻域的边界上，所有 E 值都是正的，所以极小值 E^* 也是正的。因此，在 ε 邻域的边界上

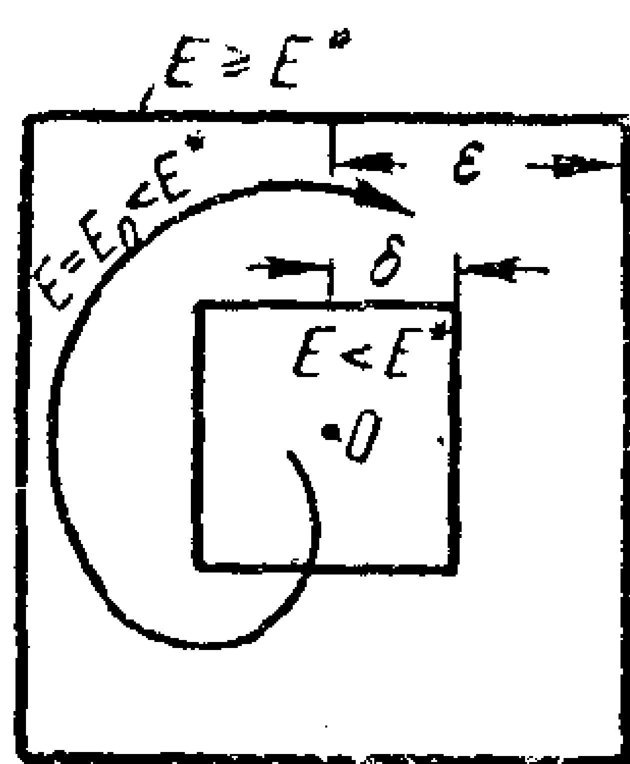


图 42.

$$E \geqslant E^* > 0. \tag{7}$$

另外，旣然連續函数 E 在坐标原点 O 的値为零，則必有点 O 的一个 δ 邻域存在[②]，使在此邻域內

---

① 如果在坐标空間原点 O 的 Δ 邻域內无奇点，則这个論断是正确的(見第 40 頁的脚注)。設点 O(函数 Π 在其上取极小值)不是奇点。因而 O 点的某一 Δ_0 邻域将不包含奇点。我們取 $\Delta<\Delta_0$。

② 由于在 δ 邻域內不等式(8)成立，所以 $\delta \leqslant \varepsilon$。

$$E<E^*. \tag{8}$$

因此，如果初始坐标和初始速度满足不等式(1)，则初始能量 $E_0<$ $<E^*$。但当保守系統运动时其总能量保持初值 E_0 不变，故在整个运动时間里 $E<E^*$. 这表明，当系統运动时，状态空間中表示这一运动的点不可能达到 ε 邻域的边界(因为在边界上 $E\geqslant E^*$)，而永远位于此邻域之內。

定理証毕。

对上述定理我們有如下的两个附注：

注 1. 对于那种在保守系統上附加以迴轉仪力和耗散力而得到的非保守系統，拉格朗日定理仍然是正确的。因为迴轉仪力并不破坏总能量守恒定律(見 § 8)，因此，当有迴轉仪力存在时，定理的全部証明无需改变仍然有效。至于耗散力的情況，則因为系統于运动时总能量 $E=T+\Pi$ 不断減少，故在运动过程中等式 $E=E_0$ 将被不等式 $E\leqslant E_0$ 所代替。但由此也可以断定，只要 $E_0<E^*$，則在整个运动过程中仍将有 $E<E^*$。因之，在此稍加修改，定理的証明仍然有效。

注 2. 保守系統的平衡位置在以下情况也是稳定的：势能 Π 在此位置有非严格极小值，但在平衡位置的任何 ε 邻域內，都有包含平衡位置于其內的封閉超曲面

$$f(q_1,\cdots,q_n)=0 \tag{9}$$

存在，使得势能在其上的值严格地大于 Π 在平衡位置的值。

事实上，若仍然假設在平衡位置 $q_1=\cdots=q_n=0$, $\Pi(0,\cdots,0)=0$。此外，还假設超曲面方程(9)是这样取的：位于此閉曲面內的点滿足不等式

$$f(q_1,\cdots,q_n)>0. \tag{10}$$

于是，不等式(10)和不等式

$$|\dot{q}_k|<c_k \quad (0<c_k<\varepsilon;\ k=1,\cdots,n) \tag{11}$$

一起在 $2n$ 維状态空間中确定了一个位于 ε 邻域(6)之內的区域 G(有界"超柱体")。在区域 G 的边界上，或是 $f=0$(此时 $\Pi>0$, $T\geqslant0$)，或是在某一个 k 之下等式 $|\dot{q}_k|=c_k$ 成立(此时 $T>0$, $\Pi\geqslant0$)。因此，严格不等式 $E=T+\Pi>0$ 在区域 G 的边界上永远被滿足。

在所討論的情况下，函数 E 在 ε 邻域(6)的边界上的极小値可能等于零。此时在拉格朗日定理的证明中，需将 ε 邻域换成位于其内的区域 G。在区域 G 的边界上，总能量的极小値 $E^*>0$。证明的其余部分无需改变。

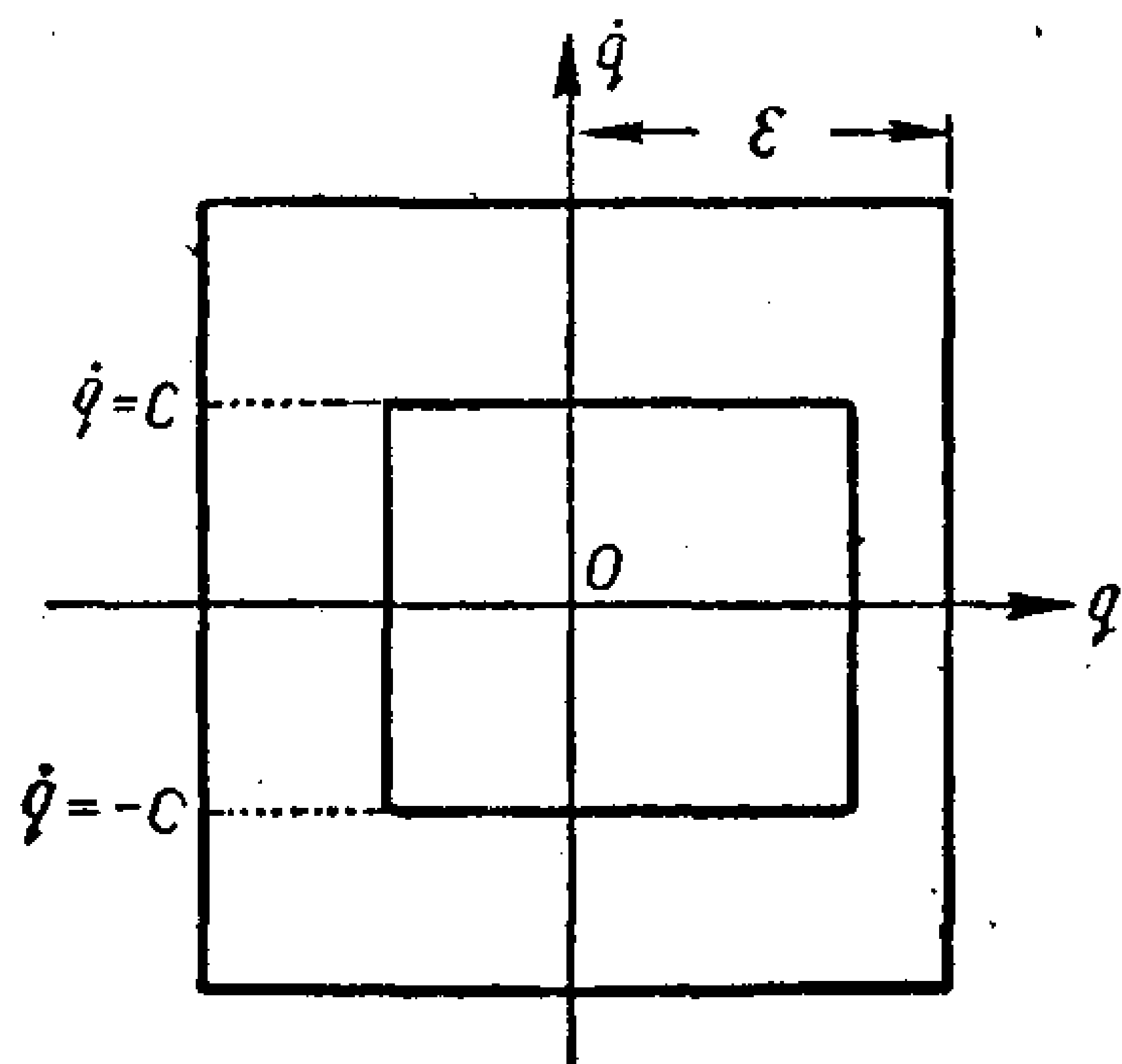


图 43.

当 $n=1$ 时，封閉超曲面(9)退化为 q 軸上原点两側的两个点所組成的集合，而区域 G 則退化为位于点 O 的 ε 邻域內的長方形(图 43)。

当系統上还作用有廻轉仪力和耗散力时，注 2 所述一切仍然有效(見注 1)。

如果函数 Π 在引自平衡位置的某条連續曲綫上处处有极小値 $\Pi=0$，則这个平衡位置可能是不稳定的。具有如下势能的自由质点就是这种情况的一个例子：势能函数不包含某一个坐标，例如 x，即 $\Pi=\Pi(y, z)$，同时 $\Pi(0, 0)==0$，当 $y^2+z^2>0$ 时，$\Pi(y, z)>0$。在这个例子中，极小値点塡滿了 x 軸。此时平衡位置 $x=y=z=0$ 是不稳定的，因为当沿 x 軸方向給质点无論多么小的初速度时，质点都将沿 x 軸作等速运动。

第 163 頁上的例 1 和例 2 所討論的是保守系統，而在例 3(第 163 頁)中，质点上作用有耗散力。在例 1 中輪圈的最低点和例 2、3 中的 $x=0$ 处，势能都具有严格的极小値。因此这些平衡位置是稳定的。

例 4. 势能 $\Pi=q^4\sin^2\dfrac{1}{q}$ [补充定义：$\Pi(0)=0$] 的一自由度保守系統。根据注 2 可知，$q=0$ 是稳定的平衡位置。

§ 34. 平衡位置不稳定准則·李亚普諾夫和契塔也夫定理

早在 1892 年，李亚普諾夫就曾在其著名的学位論文"关于运动稳定性的一般問題"中提出了关于拉格朗日定理的逆問題。这个問題直到今天还沒有完全解决。李亚普諾夫的两个定理和契塔也夫的定理部分地解决了这一問題。在这些定理中，对平衡位置的不稳定性建立了若干充分条件。

我們仍然假設在平衡位置 $q_1=\cdots=q_n=0$，$\Pi(0, \cdots, 0)=0$。現在将势能

按坐标之幂("偏差")展成級数:

$$\Pi=\Pi_m(q_1,\cdots,q_n)+\Pi_{m+1}(q_1,\cdots,q_n)+\cdots$$
$$[\Pi_m(q_1,\cdots,q_n)\neq 0,\ m\geqslant 2], \tag{1}$$

其中 $\Pi_k(q_1,\cdots,q_n)$ 是 k 次齐次函数($k=m, m+1,\cdots$); 由于在平衡位置处全体 $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)_0=0$, 故实际出現在展开式中的最低次項的次数 $m\geqslant 2$。

李亚普諾夫定理 I. 如果保守系統的势能 $\Pi(q_1,\cdots,q_n)$ 按其展开式(1)的二次項 $\Pi_2(q_1,\cdots,q_n)$① 就能断定它在平衡位置无极小值, 則此平衡位置是不稳定的。

証明. 将动能表达式 $T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ 的系数 $a_{ik}(q_1,\cdots,q_n)$ 按坐标之幂展成級数, 并以 a_{ik}^0 表示自由項[即函数 $a_{ik}(q_1,\cdots,q_n)$ 在 $q_1=\cdots=q_n=0$ 之值]。于是, 当令 $T_0=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}^0\dot{q}_i\dot{q}_k$ 时, 便有

$$T=T_0+(*),\quad \Pi=\Pi_2+(*);$$

这里及以后, 凡(*)都表示就坐标和速度而言, 那些比該式中(*)号之前的各項較高阶小的諸項之和。因为 T_0 是常系数正定二次型, 故可用变量的非奇异綫性变換同时将两个二次型 T_0 和 Π_2 化为平方和。在新变量 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 之下, T 和 Π 的展开式取如下形式②:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot{\theta}_k^2+(*),\ \Pi=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\theta_k^2+(*). \tag{2}$$

由于二次型 Π_2 要取到某些負値, 故至少有一个 $\lambda_k<0$.

在 θ 坐标中, 拉格朗日方程有如下形式:

$$\ddot{\theta}_k=-\lambda_k\theta_k+(*)\quad (k=1,\cdots,n). \tag{3}$$

我們来考察如下的輔助二次型:

$$V=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\left[\left(\lambda_k^2+\lambda_k+\frac{\mu^2}{2}\right)\theta_k^2+\mu(1-\lambda_k)\theta_k\dot{\theta}_k+\right.$$
$$\left.+\left(1+\lambda_k+\frac{\mu^2}{2}\right)\dot{\theta}_k^2\right], \tag{4}$$

---

① 即 $m=2$, 而且 Π_2 是取負値的二次型(也可以是非正的)。

② 坐标 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 称为簡正坐标或主坐标。在 §41 将更仔細地討論它們。

当 $\lambda_k \geqslant 0$ 时，式中的 $\varepsilon_k=1$，当 $\lambda_k<0$ 时，$\varepsilon_k=-1(k=1, \cdots, n)$，而数 $\mu>$ >0.

根据方程(3)和等式(4)不难驗证，在系統运动过程中

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mu t}V)=e^{-\mu t}\left[\mu\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\left(\lambda_k+\frac{\mu^2}{4}\right)(\theta_k^2+\dot{\theta}_k^2)+(*)\right]. \tag{5}$$

无損于討論的一般性，我們将认为 $\lambda_1<0$，且 λ_1 是負 λ_k 中最大的那一个。正数 μ 是这样选的：它同时滿足不等式

$$\lambda_1+\frac{\mu^2}{4}<0, \quad \lambda_1^2+\lambda_1+\frac{\mu^2}{2}>0. \tag{6}$$

由第一个不等式可以断定，等式(5)右端的和式是正定二次型。因之，当 θ_k 和 $\dot{\theta}_k$(按絕对値)充分小时：

$$|\theta_k|<\Delta, \ |\dot{\theta}_k|<\Delta \quad (k=1, \cdots, n), \tag{7}$$

等式(5)的右端将永远是正的，即

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mu t}V)>0,$$

由此便有

$$e^{-\mu t}V>e^{-\mu t_0}V_0$$

或

$$V>V_0e^{\mu(t-t_0)}. \tag{8}$$

假設除 θ_1^0 而外，所有的 $\theta_k^0, \dot{\theta}_k^0(k=1, \cdots, n)$ 全都为零，而且 θ_1^0 的模小于 Δ。于是，由等式(4)和(6)中第二个不等式便有 $V_0>0$。而这正表明，无論 $|\theta_1^0|$ 多么小，运动都必将越出邻域(7)的界限，因为在相反的情况下，由不等式(8)便有 $\lim\limits_{t\to\infty}V=\infty$，但二次型 V 在邻域(7)中却是有界的。

定理证毕。

当展开式(1)中 $m>2$ 时，可应用以下两个定理；我們在此只引入这些定理而不予证明①。

李亚普諾夫定理 II. 若保守系統的勢能 Π 由其展开式 (1) 的最低次項

① 讀者可在下列各书中找到这些定理的证明：Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, 1935, §16 和 25; Четаев Н. Г., Устойчивость движения, 1955, §17; Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 1952, §14 和 17。(后两本均有中譯本。——譯者)

$\Pi_m(q_1, \cdots, q_n)$ $(m \geqslant 2)$ 就可以断定它在 $q_1 = \cdots = q_n = 0$ 时有严格极大値[①]，則位置 $q_1 = \cdots = q_n = 0$ 是系統的不稳定平衡位置。

契塔也夫定理. 若保守系統的势能 Π 是偏差 $q_1, \cdots, q_n$ 的齐次函数，而且在平衡位置 $q_1 = \cdots = q_n = 0$ 处无极小値，則此平衡位置不稳定。

例题 1. 設 $\Pi = A(1 - \cos \alpha q)$; $n = 1$。函数 Π 在点 $q_{2k} = \frac{2k\pi}{\alpha}$ 处有严格极小値，而在点 $q_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{\alpha}$ 处有严格极大値 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。同时，极大値的情况，可按偏差之幂的展开式

$$\Pi = -\frac{\alpha^2}{2}(q - q_{2k-1})^2 + \cdots$$

的最低次項断定。于是，根据拉格朗日定理和李亚普諾夫定理，点 q_{2k} 对应于稳定平衡位置，而点 q_{2k-1} 則对应于不稳定的平衡位置。

2. $\Pi = Aq_1 \cdots q_n$。由契塔也夫定理可知，位置 $q_1 = \cdots = q_n = 0$ 是不稳定的平衡位置。

§ 35. 平衡位置的漸近稳定性·耗散系統

現在来引入关于平衡位置漸近稳定性的概念。我們将如下的稳定平衡位置称之为漸近稳定的平衡位置：若在此位置，当初始偏差和初始速度的絕对値充分小时，所有的偏差和速度均随时間 t 的无限增长而趋于零，即存在一个数 $\delta_0 > 0$，使得当不等式

$$|q_i^0| < \delta_0, \quad |\dot{q}_i^0| < \delta_0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{1'}$$

被滿足时便有

$$\lim_{t \to \infty} q_i(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} \dot{q}_i(t) = 0 \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{1}$$

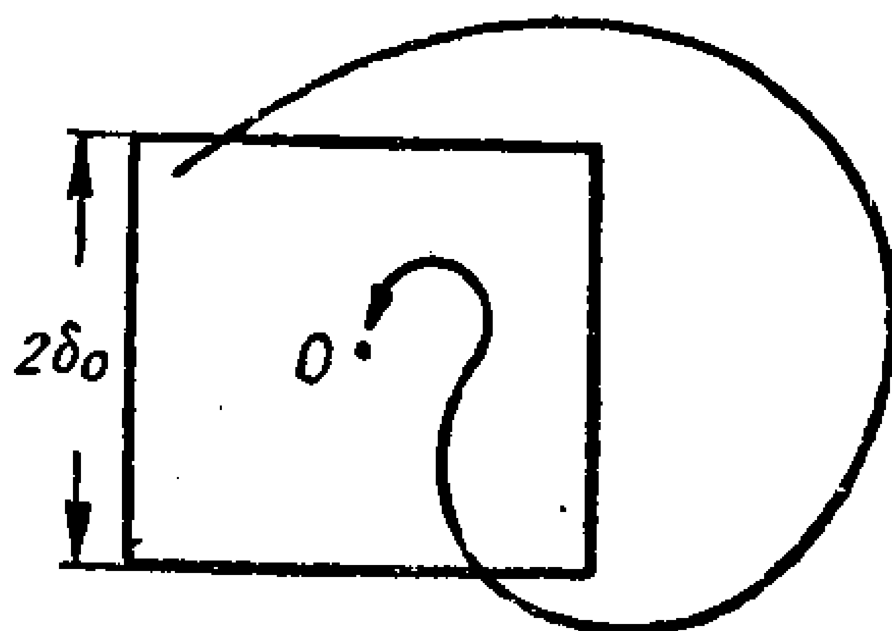


图 44.

从几何意义上来看(图 44)，这就意味着，在状态空間 $(q_i, \dot{q}_i)$ 中，自坐标原点 O 的 δ_0 邻域内开始的所有軌道，当 $t \to \infty$ 时，都将漸近地逼近 O 点。

① 也就是說，在坐标原点的某一邻域内（除去原点本身）恒有 $\Pi_m(q_1, \cdots, q_n) < 0$。这只有当 m 为偶数时才有可能。

第 163 頁上所討論的例題 1, 2, 3, 仅例 3 中的稳定平衡位置是漸近稳定的。

我們来討論在有势力 $-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}$ 和非有势力 $\widetilde{Q}_i(i=1,\cdots,n)$ 作用下的平稳系統，并假設势能Π和非有势力 $\widetilde{Q}_i$ 都不明显地依賴于时間:

$$\Pi=\Pi(q_k),\quad \widetilde{Q}_i=\widetilde{Q}_i(q_k,\dot{q}_k)\quad (i=1,\cdots,n). \tag{2}$$

在这种情况下，时間 t 不明显地出現在拉格朗日方程中，它可以写成已就广义加速度解了出来的形式(見 § 7, 第 41 頁):

$$\ddot{q}_i=G_i(q_k,\dot{q}_k)\quad (i=1,\cdots,n). \tag{3}$$

在所討論的情况下，平稳系統的总能量 E 也不显含时間:

$$E=E(q_k,\dot{q}_k). \tag{4}$$

計算它在系統运动时对时間的全导数，便得到:

$$\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}G_i\right)=E'(q_k,\dot{q}_k). \tag{5}$$

因此，在状态空間 $(q_k,\dot{q}_k)$ 的每一点，不仅总能量，而且还有总能量对时間的全导数都有确定的值。

若 $\widetilde{Q}_i(i=1,\cdots,n)$ 是耗散力(見 § 8)，則系統运动过程中 $\frac{dE}{dt}\leqslant$ $\leqslant 0$，即函数 $E'(q_k,\dot{q}_k)$ 在状态空間中所討論的区域內只取非正值。

在定耗散系統(見 § 8)情况下①，除平衡状态而外的任何运动中，除去所有 $\dot{q}_i=0$ 的那些时刻，恒有

$$\frac{dE}{dt}=E'(q_k,\dot{q}_k)<0\quad (6)。$$

对这种系統，有如下的

漸近稳定性定理. 若平稳定耗散系統的势能在某孤立平衡位

① 原书此段以及对漸近稳定性定理的表述和证明都有錯誤。作者在給苏联"Прикладная Математика и Механика"杂志編輯部的一封信(見Прикл. Матем. и Механ., Т. XXVI, вып. 2, 1962, 392頁)中对此作了改正。譯文(第 172—173 頁)按此信作了相应的更正。——編者注

置(即其領域内无其它平衡位置)有严格极小值，則此平衡位置是漸近稳定的。

证明. 按拉格朗日定理的注1，所給平衡位置是稳定的。因之，在状态空間中，始点充分靠近原点的一切运动都将不越出原点的某一領域。按定理的条件，在原点某領域内异于原点的一切点上，系統的能量

$$E>0. \tag{7}$$

由系統的定耗散性有

$$E'\leqslant 0, \tag{8}$$

且"="仅在所有 $\dot{q}_i=0$ 的那些点的集合 M 上成立。于是，由微分方程解对初值的連續依賴性知，在充分小的 $|q_i^0|$，$|\dot{q}_i^0|$ 之下，所有积分曲綫(运动)将漸近地趋近于包含在 M 内的最大不变集合① T。在所考察的情况下，集合 T 只可能由平衡状态构成，因为它們是 M 内仅有的不变集合(包含在 M 内的运动)。在平衡位置为孤立的情形，集合 T 仅由此平衡状态的一点构成。定理得证②。

在第164頁上的例3中，$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}cx^2$，$\frac{dE}{dt}=m\dot{x}\ddot{x}+cx\dot{x}=(m\ddot{x}+cx)\dot{x}=-2f\dot{x}^2<0$(因 $f>0$)，故系統是定耗散的，平衡位置是漸近稳定的。

关于平稳定耗散系統在其漸近稳定平衡位置邻域内的运动，将在§46中研究。

上面所证明的定理，是拉格朗日定理在耗散系統上的应用，李亚普諾夫曾以更一般的形式建立了这一定理。

李亚普諾夫发現，在拉格朗日定理(漸近稳定性定理)的证明

---

① 微分方程組 $\dot{x}=X(x)$(矢量形式)的解 $x=f(x_0,t)$ 构成一个以 t 为参数的空間变换群。若集合 T 在群的所有变换下变到自身，即 $f(T,t)=T(-\infty<t<\infty)$，则称 T 为对群 $f(x_0,t)$ 的不变集合。对于固定的 x_0，函数 $f(x_0,t)$ 称之为运动；点集 $\{f(x_0,t);\ -\infty<t<\infty\}$ 称之为这一运动的軌道。显然，不变集合只能由整条軌道构成。这种軌道有三个主要的拓朴类型：点、簡单閉曲綫和开区間相互一意的連續映象。它們分别对应于平衡位置、周期运动和非周期运动。——譯者注

② §33末所作之注2对此定理仍然有效。

中，可以将能量 E 换成有連續一阶偏导数的任何連續函数 $V(q_k, \dot{q}_k)$，这函数在平衡状态有严格极小值，而且在系統任何运动中不增大(严格递减)。而証明的其余部分依旧不变。

今按运动方程(3)来計算函数 V 对时間的导数:

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial V}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}G_i(q_k, \dot{q}_k)\right]=V'(q_k, \dot{q}_k). \qquad (9)$$

由上式可以断定，函数 V' 在状态空間坐标原点 O 为零，这是因为 O 点与平衡状态相对应，而在平衡状态处所有的 $\dot{q}_i=0$，所有的 $\ddot{q}_i=$ $=G_i=0$。若函数 V 在任何运动中都不增大，则 $\frac{dV}{dt}=V'(q_k, \dot{q}_k)\leqslant$ $\leqslant 0$。在此情况下，函数 V' 在平衡状态 O 有极大值。如果这个极大值还是严格的，则在 O 点的某一邻域内（O 点本身除外）将有 $V'<0$，因而在系統运动中，函数 V 在此邻域内将严格递减。

还应注意，在稳定性准則的表述中，"极小值"和"极大值"二詞的地位是可以互相对調的，因为只要把函数 V 换成函数 $-V$ 我們就仍回到原来的表述形式。

因此，可以认为下述定理已經证明:

定理. 設有平稳系統，其上作用力不明显依賴于时間。若其平衡位置已經給定，且存在連同一阶偏导数連續的函数 $V(q_k, \dot{q}_k)$，在給定的平衡状态有严格极值，则当 V（按运动方程計算的）对时間的导数 V' 在此同一状态有相反的极值时，所給平衡位置是稳定的。若此导数极值同时还是严格的，则平衡位置是漸近稳定的。

定理中說到的函数 $V(q_k, \dot{q}_k)$ 通常称为李亚普諾夫函数。

§ 36. 条件稳定性 · 問題的一般提法 · 运动或任一过程的稳定性 · 李亚普諾夫定理

在第 163 頁上，定义平衡位置稳定性的不等式 (1)和(2)是就

全体偏差q_i和全体广义速度$\dot{q}_i$而言的。然而在許多問題中，我們將遇到条件稳定性問題。此时这些不等式仅为$q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$这$2n$个量中的某几个所滿足，或更一般的提法是为这$2n$个量的某些函数$x_1, \cdots, x_m$:

$$x_i = f_i(q_k, \dot{q}_k) \quad (i=1, \cdots, m) \tag{1}$$

所滿足。同时，假設函数(1)在

$$q_k = 0, \dot{q}_k = 0 \quad (k=1, \cdots, n)$$

时全都等于零，即$f_i(0, \cdots, 0) = 0$，而且滿足自治的①一阶常微分方程組②:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \cdots, x_m, t) \quad (i=1, \cdots, m), \tag{2}$$

其中$X_i(x_1, \cdots, x_m, t)$ $(i=1, \cdots, m)$是区域

$$|x_i| \leqslant \Delta, \ t \geqslant t_0 \quad (i=1, \cdots, m) \tag{3}$$

中的連續函数(t_0是固定的初始时刻)。

微分方程組(2)的零解$x_i \equiv 0 (i=1, \cdots, m)$对应于平衡状态。零解的存在要求方程(2)的右端滿足条件

$$X_i(0, \cdots, 0, t) \equiv 0 \quad (i=1, \cdots, m). \tag{4}$$

从数学观点上說，这就是关于微分方程組(2)的零解的稳定性問題，这个稳定性被定义为：对于任何$\varepsilon>0$，必有一$\delta=\delta(\varepsilon)>0$存在，只要

$$|x_i(t_0)| < \delta \quad (i=1, \cdots, m), \tag{5}$$

則对于任何$t \geqslant t_0$便有

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i=1, \cdots, m). \tag{6}$$

为了对不等式(5)和(6)作几何上的解釋，我們将用到m維空

① 見第76頁脚注②。

② 当研究平稳系統的条件稳定性时，函数$X_i (i=1, \cdots, m)$不显含时間t。我們将t作为变量写入右端是指非平稳系統和更一般的情况。

間$(x_1, \cdots, x_m)$坐标原点的ε, δ邻域。对于漸近稳定性情形，还需补充要求：存在一$\delta_0>0$，使当

$$|x_i(t_0)|<\delta_0 \quad (i=1, \cdots, m) \tag{7}$$

时便有

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t)=0 \quad (i=1, \cdots, m). \tag{8}$$

如果研究平衡位置的絕对稳定性，那就可以取量$q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$或$q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n$作为$x_1, \cdots, x_m$。在头一种情况，方程組(2)乃是写成关于未知函数$q_1, \cdots, \dot{q}_n$的一組$2n$个一阶微分方程形式的拉格朗日方程。在第二种情况，方程組(2)則是哈密頓正則方程：

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \cdots, n). \tag{9}$$

我們来討論方程組(2)的两个重要的特殊情况(它們在应用中經常遇到)：

1°. **平稳情况**。方程(2)的右端X_i不显含时間t，即

$$\frac{\partial X_i}{\partial t}=0 \quad (i=1, \cdots, m).$$

2°. **周期情况**。右端部分X_i关于变量t有周期τ：

$$X_i(x_1, \cdots, x_m, t+\tau)=X_i(x_1, \cdots, x_m, t) \quad (i=1, \cdots, m).$$

在这两种情况下，微分方程組(2)的零解的稳定性可借下述定理来判定。这个定理是§35末所引入的定理的直接推广。

李亚普諾夫定理. 若在平稳的或周期的情况下，区域(3)中有連同其一阶偏导数連續的函数$V(x_1, \cdots, x_m, t)$存在，对于(看作参数的)t的任何值，在点$x_1=\cdots=x_m=0$处有严格极值，且对时間的导数$V'(x_1, \cdots, x_m, t)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial x_i}X_i+\frac{\partial V}{\partial t}$有相反的极值，則方程組(2)的零解稳定。若导数的极值同时还是严格的，則方程組(2)

的零解渐近稳定。这里假設函数 V 在平稳情况不显含 t，而在周期情况，对于 t 是周期的，周期为τ[τ是方程(2)右端部分的周期]。

对此定理的证明，只要就周期情况进行就够了，因为平稳情况可以看作具有任意周期 τ 的特殊情形。我們将稳定情况和漸近稳定情况分开来证。

对于稳定情况，只要将差 $V(x_1,\cdots,x_m,t)-V(0,\cdots,0,t)$看作 E，将 m 維空間$(x_1,\cdots,x_m)$看作空間$(q_i,\dot{q}_i)$，再逐句重复前面拉格朗日定理的证明就行了。至于函数V 中所出現的t，由于它被看作参数(根据周期性，它可以在有限区間 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau$内变化)，所以不会使定理的证明复杂化。

对于漸近稳定情况，证明如下。

为确定計，設在空間 $(x_1\cdots,x_m)$ 的原点 O 函数 V 有严格极小值，V'有严格极大值。令

$$E=V(x_1,\cdots,x_m,t)-V(0,\cdots,0,t),$$

则由定理的条件知，在原点 O 的某 ε 邻域内异于 0 的一切点上

$$E(x_1,\cdots,x_m,t)>0 \tag{I}$$

$$\frac{dE}{dt}=V'(x_1,\cdots,x_m,t)-V'(0,\cdots,0,t)\equiv E'<0\text{[①]}. \tag{II}$$

由前面所证明的稳定情况知，組(2)的零解是稳定的，故存在一数$\delta_0>0$，使組(2)初值在原点 O 的 δ_0 領域內的一切解不越出 ε 領域(图45)。对于这些解中的任何一个，由于函数 E 随 t 递减，所以

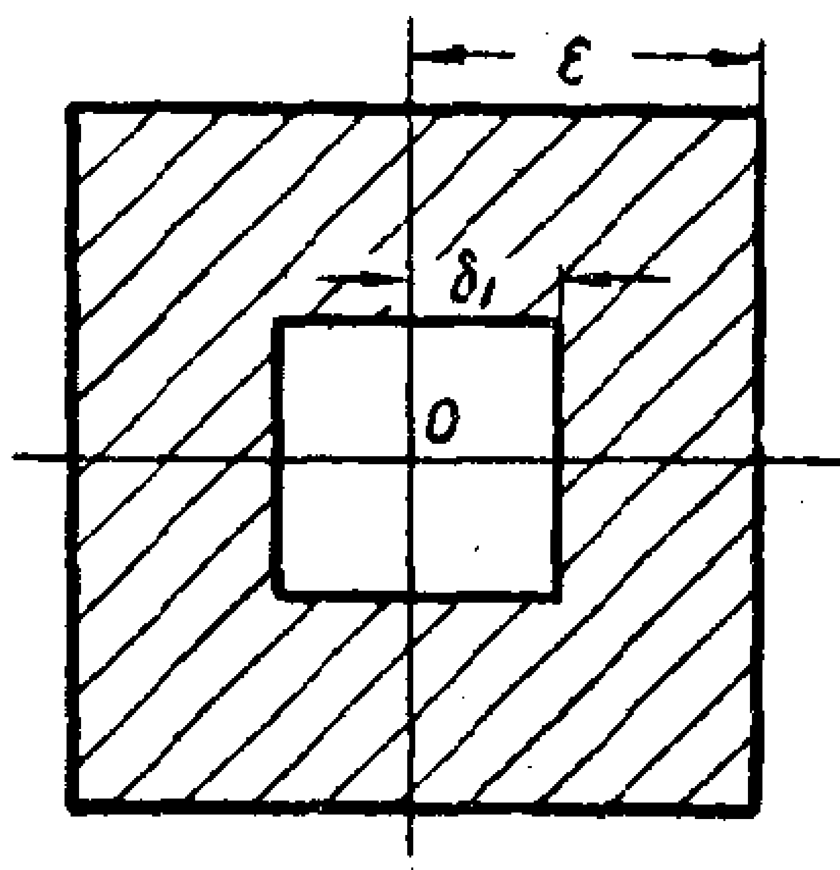


图 45.

$$\lim_{t\to\infty}E(t)=E_\infty\geqslant 0$$

而且

① 由不等式(I)和(II)可以断定，在原点 O 函数 E 有严格极小值，而其时間导数 E' 有严格极大值(在原点 O，函数 E 和 E' 同为零)。

$$E(t) \geqslant E_\infty \ (t \geqslant t_0).$$

先假定 $E_\infty > 0$，則必存在原点 O 的一个 δ_1 領域，其中 $E < E_\infty$。由于对任一解有 $E(t) \geqslant E_\infty$，因而所有解都不可能走出 ε 領域和 δ_1 領域边界間的閉区域（在图 45 上此区域以斜綫标出）。設在此区域內函数 E' 有負的极大値 $-h$，因而对每个解都有 $\frac{dE}{dt} \leqslant -h < 0$，$E \leqslant E_0 - h(t - t_0)$。由后一不等式得，在足够大的 t 之下，将有 $E < 0$，但这是不可能的。因而必須 $E_\infty = 0$，即

$$\lim_{t \to \infty} E = 0. \tag{III}$$

按不等式(I)，等式 $E = 0$ 只可能在点 O 成立，于是由(III)得，当 $t \to \infty$ 时由 δ_0 邻域开始的所有积分曲綫都趋近于坐标原点，即有

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \ (i = 1, \cdots, m).$$

定理证完[①]。

应当注意，在一般情况（非平稳的和非周期的情况）下，对李亚普諾夫函数还需要加上更强的条件[②]。

我們来指出李亚普諾夫定理的一个特殊情况，它常被用作簡单稳定性（非漸近稳定性）的判定准則。

設函数 $V(x_1, \cdots, x_m, t)$ 是微分方程組(2)的积分，即当以方程組(2)的任何解代入其中时，函数 V 变为常数。此时，$\frac{dV}{dt} = V'(x_1, \cdots, x_m, t) \equiv 0$，因之，可以认为函数 V' 在点 $x_1 = \cdots = x_m = 0$ 处，对于任何 t 值，有极大値或极小値（当然是非严格的）。于是，由李亚普諾夫定理得如下推論：

推論. 若微分方程組(2)有积分 $V(x_1, \cdots, x_m, t)$（在平稳情况下不显含 t，在周期情况下对于 t 是周期的，且周期为 τ），且此积

---

① 譯文（第177—178頁）中这个定理的证明也是根据作者致 ИММ 的信（見 §35 漸近稳定性定理的脚注）改写的。——譯者注

② 例如，見 Четаев Н. Г., Устойчивость движения, гл. II.（有中譯本）

分在点 $x_1=\cdots=x_m=0$ 处，对于任何固定的 t，有严格极値，則組(2)的零解稳定。

我們注意，证明保守系統拉格朗日定理中，我們曾利用了能量积分 E。

現在来看由一阶微分方程組

$$\frac{dz_i}{dt}=Z_i(z_1, \cdots, z_m, t) \quad (i=1, \cdots, m) \tag{10}$$

所描述的运动或更一般的过程；上式右端是当 $t\geqslant t_0$时，变量 $z_1, \cdots, z_m$ 的某个变化区域内的連續函数，它滿足在給定初始数据 $z_i(t_0)$ $(i=1, \cdots, m)$之下的解的存在和唯一性条件。

設 $\tilde{z}_i(t)$ $(i=1, \cdots, m)$ 是方程組 (10) 的解，它确定了某个过程。为了查明这个过程的稳定性問题，我們引入新的未知函数——“偏差”

$$x_i=z_i-\tilde{z}_i(t) \quad (i=1, \cdots, m) \tag{11}$$

代替未知函数 $z_1, \cdots, z_m$。于是，在新变量之下，微分方程組(10)可以写成方程組(2)的形式，其中

$$X_i=Z_i[x_1+\tilde{z}_1(t), \cdots, x_m+\tilde{z}_m(t)]-X_i[\tilde{z}_1(t), \cdots, \tilde{z}_m(t)]. \tag{12}$$

在新变量中，与微分方程組 (10) 的解 $z_i=\tilde{z}_i(t)(i=1, \cdots, m)$相对应的是微分方程組(2)的零解 $x_1=\cdots=x_m=0$。这表明，关于过程 $\tilde{z}_i(t)(i=1, \cdots, m)$ 的稳定性問题，可以归結为我們已經研究过了的、关于微分方程組 (2) 的零解的稳定性問题。换句話說，如果右端按公式(12)确定的偏差方程組 (2) 的零解 $x_1=\cdots=x_m=0$ 是稳定的(或漸近稳定的)，則方程組 (10) 的解 $z_i=\tilde{z}_i(t)(i=1, \cdots, m)$ 便称之为稳定的(或漸近稳定的)。所有这些就为本节所引入的李亚普諾夫定理开辟了广闊的用場。这个定理不仅可用来判定平衡位置的稳定性，而且也可以用来判定运动的稳定性和由常微分方程組所确定的任何更一般过程的稳定性。

例題　1. 我們来看有固定点 O 的剛体的慣性运动。在此情况下，欧拉动力学方程有如下形式：

$$A\frac{dp}{dt}=(B-C)qr,\quad B\frac{dq}{dt}=(C-A)rp,$$

$$C\frac{dr}{dt}=(A-B)pq. \tag{13}$$

这里 p, q, r 是角速度 ω 在物体慣性主軸 $O\xi, O\eta, O\zeta$ 上的投影；A, B, C 是物体对这些軸的轉动慣量。

方程(13)有如下的三个特解：

$$1^\circ\ q=r=0,\quad p=\text{const}=p_0;$$

$$2^\circ\ r=p=0,\quad q=\text{const}=q_0;$$

$$3^\circ\ p=q=0,\quad r=\text{const}=r_0;$$

这些特解决定了物体繞各主軸的永久轉动。

我們只来討論轉动 1° 的穩定性，因为，只要換換各軸的标号就可以将 2° 和 3° 写成 1° 的样子。同时，欧拉方程(13)的解 1° 的穩定性将决定轉动 1° 对角速度 ω 的条件穩定性①。

令 $x_1=p-p_0$，$x_2=q$，$x_3=r$，則偏差方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=\frac{B-C}{A}x_2x_3,\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{C-A}{B}x_3(x_1+p_0),\\&\frac{dx_3}{dt}=\frac{A-B}{C}x_2(x_1+p_0).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

假設慣性椭球的长軸或短軸位于所討論的永久轉动軸 $O\xi$ 上。由于量 A, B, C 各与慣性椭球軸长平方成反比，这就意味着，或者 $A<B, C$，或者 $A>B, C$。今取函数

$$V=(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2+2Ap_0x_1)^2\pm[B(B-A)x_2^2+C(C-A)x_3^2]$$

作为李亚普諾夫函数，其中"+"号取在 $A<B, C$ 的情况，"−"号取在 $A>B, C$ 的情况。

函数 V 在 $x_1=x_2=x_3=0$ 处为零，而且在这个点的邻域內为正，即函数 V 在該点有严格极小值。另外，不难驗证，按方程(14)計算的导数 $\frac{dV}{dt}=0$，即函数 V 是微分方程組(14)的积分。因此，按照李亚普諾夫定理的推論，繞慣性椭球长軸或短軸的永久轉动是穩定的。

① 对 ω 的穩定性是指在全部运动时間里，初始角速度 ω_0 的微小变化将引起矢量 ω 的微小变化。換句話說，也就是对偏差 $x_1=p-p_0, x_2=q, x_3=r$ 的穩定性。

利用契塔也夫不稳定准則① 可以证明繞慣性橢球中軸的永久轉动不稳定。

2. 作为一个例子，我們来看关于炮彈旋轉运动的稳定性問題②。

为簡单起見，設炮彈重心 C 以不变的速度 $v=\text{const}$ 沿水平軸 x 作直綫运动。令 Cxy 为鉛垂射击面。彈体軸(动力对称軸) $C\xi$ 的位置，由以下两个角来确定：$C\xi$ 軸在 Cxy 面上的投影 Cx_1 与 Cx 間的夾角 α 和 Cx_1 与 $C\xi$ 間的夾角 β(图 46)。依次轉以角 α 和 β，三面体 $Cxyz$ 便轉到三面体 $C\xi\eta\zeta$ 的位置。再繞 $C\xi$ 軸轉以角 φ，三面体 $C\xi\eta\zeta$ 便轉到固連在炮彈上的三面体的位置。因此，炮彈角速度 ω 由三个分量組成：

图 46.

$$\omega=\omega_1+\omega_2+\omega_3,$$

其中 $\omega_1=\dot{\alpha}$, $\omega_2=\dot{\beta}$, $\omega_3=\dot{\varphi}$。角速度在慣性主軸 $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$ 上的投影由下列公式决定：

$$p=\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\sin\beta,\quad q=-\dot{\beta},\quad r=\dot{\alpha}\cos\beta.$$

令 A 表示炮彈的軸轉动慣量，B 为其赤道轉动慣量，則得动能表达式

$$T=\frac{1}{2}[Ap^2+B(q^2+r^2)]=\frac{1}{2}[A(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\sin\beta)^2+B(\dot{\beta}^2+\dot{\alpha}^2\cos^2\beta)].$$

假設除重力而外，炮彈上还有作用在彈体軸 D 点("压力中心")的迎面空气阻力 $\boldsymbol{R}$，它大小不变③，方向与速度 $\boldsymbol{v}$ 相反，即沿 x 軸的負方向。令 $l=CD$，γ 表示軸 Cx 和 $C\xi$ 間的夾角，則 $\boldsymbol{R}$ 对 C 点的力矩等于 $Rl\sin\gamma$，而力 $\boldsymbol{R}$ 的元功为

$$\delta A=R\,l\sin\gamma\delta\gamma=-\delta(Rl\cos\gamma).$$

① Четаев Н. Г., Устойчивость движения, 第二版, 1955, 第 37 頁。

② 这个問題的解曾由契塔也夫給出，发表在"Прикладная математика и механика", т. X, вып. 1, 1946。

③ R 的大小是 v 的函数：$R=f(v)$。因此，由 $v=\text{const}$ 便有 $R=\text{const}$。

因此，可以取函数①

$$\Pi = Rl\cos\gamma = Rl\cos\alpha\cos\beta$$

作为力的势。

α 角和 β 角的变化刻划出彈体軸的振动特征。为了判定炮彈旋轉运动的稳定性，我們由以下三个运动积分出发：

1) $T+\Pi=\text{const}$; 2) $G_x=\text{const}$; 3) $G_\xi=Ap=\text{const}$.

头一个积分是能量积分。G_x 和 G_ξ 是动量矩 $\boldsymbol{G}_C$ 在 Cx 軸和 $C\xi$ 軸上的投影。G_x 在系統运动时保持不变的性质可由力 $\boldsymbol{R}$ 对 Cx 軸之矩为零得出。第三个积分表示对应于循环坐标 φ 的广义冲量 Ap 不变。由图 46 可以看出，

$$\begin{aligned}G_x &= G_\xi\cos(x\xi)+G_\eta\cos(x\eta)+G_\zeta\cos(x\zeta)=\\&=Ap\cos(x\xi)+Bq\cos(x\eta)+Br\cos(x\zeta)=\\&=Ap\cos\alpha\cos\beta+B(\dot\beta\sin\alpha-\dot\alpha\cos\alpha\cos\beta\sin\beta)②.\end{aligned}$$

将前两个积分和第三个积分組合，利用已經得到的 T, Π, G_x 的表达式便得到以下的两个运动积分 W_1 和 W_2：

$$W_1=\frac{1}{2}B(\dot\alpha^2\cos^2\beta+\dot\beta^2)+Rl(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{const},$$

$W_2=B(\dot\beta\sin\alpha-\dot\alpha\cos\alpha\cos\beta\sin\beta)+Ap(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{const}$，它們在 $\alpha=\beta=\dot\alpha=\dot\beta=0$ 时等于零。

現在来找运动积分的一个定号綫性組合 $W_1-\lambda W_2$。我們先来确定 W_1 和 W_2 中小量 $\alpha, \beta, \dot\alpha, \dot\beta$ 的最低次項：

$$W_1=\frac{1}{2}B(\dot\alpha^2+\dot\beta^2)-\frac{1}{2}Rl(\alpha^2+\beta^2)+\cdots,$$

$$W_2=B(\dot\beta\alpha-\dot\alpha\beta)-\frac{1}{2}Ap(\alpha^2+\beta^2)+\cdots.$$

此时，

$$W_1-\lambda W_2=\frac{1}{2}[B\dot\alpha^2+2B\lambda\dot\alpha\beta+(Ap\lambda-Rl)\beta^2]+$$

$$+\frac{1}{2}[B\dot\beta^2-2B\lambda\dot\beta\alpha+(Ap\lambda-Rl)\alpha^2]+\cdots.$$

为使上式每一方括弧中的表达式是正定的，只要滿足不等式

---

① 在以 C 为中心的球面上，弧 α, β, γ 构成一直角球面三角形，α, β 为其"勾股"，γ 为其"弦"。对于这样的三角形，公式 $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$ 成立。公式的正确性可仿效初等几何的办法来证明。

② 弧 α，$\frac{\pi}{2}+\beta$ 和 $(x\zeta)$ 构成一个以 α 和 $\frac{\pi}{2}+\beta$ 为"勾股"的球面直角三角形。因此，

$$\cos(x\zeta)=\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\cos\alpha\sin\beta.$$

$$B^2\lambda^2 < B(Ap\lambda - Rl)$$

就足够了。約去两端的 B，經移項后即得:

$$B\lambda^2 - Ap\lambda + Rl < 0.$$

欲使上列不等式对某一实的 λ 成立，就必須这不等式左端的二次三項式有实根，即如下的不等式应当成立:

$$A^2p^2 > 4BRl.$$

此即保证炮彈旋轉运动(在"偏差"$\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ 之下)稳定的条件，因为当滿足此条件时便可得一实数 λ 使积分 $W_1 - \lambda W_2$ 在 $\alpha = \beta = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ 时有严格极小値(等于零)。

§ 37. 綫性系統的稳定性

在前一节中曾經指出，对于由常微分方程組[①]所决定的任何过程的稳定性的研究都可以归結为对偏差方程組零解稳定性的研究。

假設偏差微分方程是綫性的，而且是常系数的:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{1}$$

我們来找該方程如下形式的特解:

$$x_i = u_i e^{\lambda t}\left(i = 1, \cdots, n;\ \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 > 0\right). \tag{2}$$

将表达式(2)代入方程(1)，約去 $e^{\lambda t}$ 即得未知量 u_i 和 λ 之間的关系式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k = \lambda u_i \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{3}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \lambda\delta_{ik})u_k = 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{4}$$

式中 $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$ ——克朗尼克符号。

① 如所周知，任何这样的方程組总可以写成一阶微分方程組的形式。

因为在欲求之解(2)中，常数 u_i 至少应当有一个不等于零，故齐次方程組(4)的系数行列式应等于零：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

这样，我們便得到了一个关于 λ 的 n 次代数方程，可用以确定 λ。

方程(5)称为系数矩陣

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

的特征方程或长期方程。特征方程的根叫做矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的特征数。

取矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的任何特征数作为 λ，由綫性方程組(4)便可求得与此特征数相对应的一組常数 u_i。

为方便計，往后我們对原方程組(1)和关系式(2)、(3)引入矩陣形式的写法。

在討論中我們引入矢量列

$$\boldsymbol{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix}.$$

于是，等式(1)—(3)和(5)便可以写成①：

① 方陣 $\boldsymbol{A}$ 与列 $\boldsymbol{x}$ 相乘时，取方陣 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与列 $\boldsymbol{x}$ 的对应元素相乘，并将这些乘积相加。如此所得之和便是乘积列 $\boldsymbol{Ax}$ 的第 i 个元素。将列 $\boldsymbol{x}$ 各元素微分即得列的导数 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$。

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \qquad (1')$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}e^{\lambda t}, \qquad (2')$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\ \ (u\neq 0), \qquad (3')$$

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0. \qquad (5')$$

这里 $\boldsymbol{E}=\|\delta_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$——单位矩陣。

与数 λ 一同滿足关系式(3′)的矢量列 $\boldsymbol{u}\neq 0$ 称为矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的、对应于特征数 λ 的固有矢量。因此，在方程組(1′)的每組形如(2′)式的解中，λ 乃是矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的特征数，$\boldsymbol{u}$ 是与之对应的固有矢量。

我們先来討論特征方程 (5) 有 n 个不同的根 $\lambda_k(k=1, \cdots, n)$ 的情況。对于每一个特征数 λ_k 都有固有矢量 $\boldsymbol{u}_k$ 和方程組(1)的形如 $\boldsymbol{u}_k e^{\lambda_k t}$ 的特解与之对应。这些解的带有任意常系数的綫性組合

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n} C_k \boldsymbol{u}_k e^{\lambda_k t} \qquad (6)$$

仍然是方程組(1)的解。

为了证明公式(6)包括了方程組 (1) 的一切解，我們先来证明对应于不同特征数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的矢量列 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 彼此綫性无关。

假設

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{u}_k=0. \qquad (7)$$

将等式(7)两端左乘以矩陣 $\boldsymbol{A}$，則由等式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_k=\lambda_k\boldsymbol{u}_k\ \ (\boldsymbol{u}_k\neq 0, k=1, \cdots, n),$$

便有

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \boldsymbol{u}_k=0. \qquad (8)$$

由关系式(7)和(8)消去常数 c_1，得：

$$\sum_{j=2}^{n}(\lambda_j-\lambda_1)c_j\boldsymbol{u}_j=0. \tag{9}$$

再将此式左乘以 $\boldsymbol{A}$，并将所得等式与(9)联立消去 c_2，如此等等，最后便得到

$$(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})c_n\boldsymbol{u}_n=0, \tag{10}$$

由此便有 $c_n=0$。因为等式(7)中所有各項都是平等的，故

$$c_1=c_2=\cdots=c_n=0,$$

即固有矢量 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 之間不可能存在任何形如(7)式的关系，因之，这些矢量綫性无关。

在公式(6)中令 $t=0$，得

$$\boldsymbol{x}_0=\sum_{k=1}^{n}C_k\boldsymbol{u}_k. \tag{11}$$

任意給定初始矢量 $\boldsymbol{x}_0$，根据矢量 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 的綫性无关性，我們便可以从等式(11)唯一地确定 $C_k(k=1,\cdots,n)$。因此，公式(6)包括方程組(1)满足任意初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解，即包括方程組(1)的一切解。

在微分方程理論教程中曾证明在重根情况下，公式(6)将变得稍为复杂些。此时公式中可能要出現所謂的“长期項”——代替常矢量 $\boldsymbol{u}_k$ 而以 t 的多項式 $\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{u}'_kt+\cdots$ 为因子的項。在一般情况下，微分方程組(1)的任何解均可由如下公式确定：

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n}C_k(\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{u}'_kt+\cdots)e^{\lambda_kt}. \tag{12}$$

从公式(6)和(12)可以直接得出两个重要的推論。

1°. 若矩陣 $\boldsymbol{A}$ 所有的特征数都有負的实部，即

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathrm{R}\vartheta\lambda_k=-\alpha<0,$$

則 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$，因之微分方程組(1)的零解是漸近稳定的[①]。

① 数 $\alpha>0$ 有时称为稳定度。

現在假設至少对于某一个 k, $\mathrm{Re}\lambda_k>0$。于是，当 $t\to\infty$ 时，方程組(1)有非零解 $\boldsymbol{x}=C_k\boldsymbol{u}_k e^{\lambda_k t}$ 趋于无穷。同时由于 C_k 是任意常数，初值(当 $t=0$ 时) $\boldsymbol{x}_0=C_k\boldsymbol{u}_k$ 可以任意小。故在此情况下，解 $\boldsymbol{x}=0$ 不稳定。因此，下面的論断成立：

2°. 即使矩陣 A 的一个特征数 λ_k 有正实部 ($\mathrm{Re}\lambda_k>0$)，微分方程組(1)的零解也不稳定①。

例題. 介质阻力与速度一次方成正比的綫性振子，其平衡位置是漸近稳定的。其实，(見第 164 頁上的例 3)如果令 $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$, 則运动微分方程 $m\ddot{x}+2f\dot{x}+cx=0(m, c, f>0)$ 可以写成两个一阶微分方程的形式：

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-\frac{c}{m}x_1-2\frac{f}{m}x_2.$$

特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{c}{m} & -2\frac{f}{m}-\lambda \end{vmatrix}\equiv\lambda^2+2\frac{f}{m}\lambda+\frac{c}{m}=0$$

的根有負的实部 $-\frac{f}{m}$。这就保证了平衡位置的漸近稳定性。

§ 38. 按綫性近似的稳定性

在微分方程組(非綫性的！)

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, \cdots, x_n, t)\quad (i=1, \cdots, n) \tag{1}$$

中，将右端部分按偏差 $x_1, \cdots, x_n$ 之冪展成級数，得：

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k+f_i\quad (i=1, \cdots, n), \tag{1'}$$

其中 f_i 是 X_i 展开式中，从 $x_1, \cdots, x_n$ 的二次項开始的所有各項之和($i=1, \cdots, n$)。

在平稳情况下，a_{ik} 是常系数，函数 f_i 只依賴于 $x_1, \cdots, x_n$ 而不

① 当全体 $\mathrm{Re}\lambda_k\leqslant 0(k=1, \cdots, n)$ 时，即使其中有等号成立，只要公式(12) 所有 $\mathrm{Re}\lambda_k=0$ 的那些項中无长期項，則解 $\boldsymbol{x}=0$ 仍然是稳定的。反之，解 $\boldsymbol{x}=0$ 不稳定。

依賴于t。在周期情况下，a_{ik}是t的周期函数，周期为τ，而非綫性項$f_i=f_i(x_1, \cdots, x_n, t)$对于$t$也是周期的，周期也是$\tau$。

若将方程(1′)中的所有非綫性項f_i丢掉，則得一綫性微分方程組，此綫性微分方程組称为非綫性方程組(1)的綫性近似。

上世紀末，在龐伽雷和李亚普諾夫的研究中，已就平稳情况和周期情况查明，非綫性方程組(1)零解的稳定性可按其綫性近似来判定，即由綫性近似的零解的漸近稳定性可以断定非綫性方程組的零解的漸近稳定性①。由于研究綫性方程組比研究非綫性方程組簡单得多，这一論断得到了广泛的应用。

我們仅限于討論平稳情况，同时，为了证明上述論断，我們将方程組(1′)写成矩陣的形式：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{1''}$$

这里$\boldsymbol{A}=\|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$是元素为常数的方陣，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$是以$f_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i=1, \cdots, n)$为元素的矢量列。按照假定，綫性近似的零解漸近稳定，故(見§37)矩陣$\boldsymbol{A}$的所有特征数$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$都有負实部：

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathrm{Re}\lambda_k=-\alpha<0. \tag{2}$$

我們約定以$|\boldsymbol{z}|$表示分量为$z_1, \cdots, z_n$的矢量列$\boldsymbol{z}$的“长度”：

$$|\boldsymbol{z}|=\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)^{1/2}. \tag{3}$$

由于矢量列$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的每个元素都从变量的二次項开始，所以

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\leqslant\varepsilon|\boldsymbol{x}|, \tag{4}$$

---

① 这里假設右端$X_i(x_1, \cdots, x_n, t)$是連續函数。目前，对于右端X_i不連續的情况，綫性近似应如何理解已經查明，并就周期情况和某些非周期情况建立了按綫性近似判定稳定性的相应准則。見 Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р., Прикладная математика и механика, т. 21, вып. 5, 1955 和 Ливартовский И. В., 同一刊物, т. 23, вып. 3, 1959。

而且只要限制变量$x_1, \cdots, x_n$在足够小的邻域$|\boldsymbol{x}|<\Delta$之内变化，式中常数$\varepsilon>0$便可以选得随便多么小。

证明[①]有賴于下述引理:

引理. 利用非奇异綫性变量变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{y} \quad (\det \boldsymbol{U} \neq 0) \tag{5}$$

可以将綫性微分方程組$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$化为"三角形"的[②]:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + b_{12} y_2 + \cdots + b_{1n} y_n, \\
\frac{dy_2}{dt} &= \qquad\quad \lambda_2 y_2 + \cdots + b_{2n} y_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_n y_n,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是矩陣$\boldsymbol{A}$的特征数，而且，当适当选擇变换(5)时，可使"非对角綫"系数$b_{ik}(i<k)$的模变得随便多么小[③]。

对非綫性方程組(1″)施行变换(5)。在新变量中，方程組(1″)可以写成

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + b_{12} y_2 + \cdots + b_{1n} y_n + g_1(\boldsymbol{y}), \\
\frac{dy_2}{dt} &= \qquad\quad \lambda_2 y_2 + \cdots + b_{2n} y_n + g_2(\boldsymbol{y}), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_n y_n + g_n(\boldsymbol{y}),
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中以$g_1(\boldsymbol{y}), \cdots, g_n(\boldsymbol{y})$为元素的矢量列$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$由等式

---

① 見 Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, М., 1952.

② 在变换(5)之下，系数矩陣$\boldsymbol{A}$被矩陣$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$所代替，它是三角形的。

③ 引理的证明将在后面第190—192頁上給出。

$$g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{y}) \tag{8}$$

确定，它满足不等式①

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|<\eta|\boldsymbol{y}|, \tag{9}$$

其中数 η，如同数 ε 一样，也可以取得要多么小就多么小，只要邻域 $|\boldsymbol{x}|<\Delta$（相应的是 $|\boldsymbol{y}|<\Delta_1$）取得足够小就行。

于是，由方程(7)和不等式(2)和(9)便有②

$$|\boldsymbol{y}|\frac{d|\boldsymbol{y}|}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\boldsymbol{y}|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}y_i\bar{y}_i=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\frac{d\bar{y}_i}{dt}+\bar{y}_i\frac{dy_i}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\lambda_i|y_i|^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i<k}(b_{ik}y_k\bar{y}_i+\bar{b}_{ik}\bar{y}_ky_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(g_i\bar{y}_i+\bar{g}_iy_i)\leqslant$$

$$\leqslant(-\alpha+\delta+\eta)|\boldsymbol{y}|^2\left(\delta=\sum_{i<k}|b_{ik}|\right),$$

即

$$\frac{d|\boldsymbol{y}|}{dt}\leqslant(-\alpha+\delta+\eta)|\boldsymbol{y}|,$$

因之，

$$|\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{y}_0|e^{(-\alpha+\delta+\eta)(t-t_0)}\quad(\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{y}(t_0)). \tag{10}$$

我們来这样选择正数 δ 和 η，使之滿足不等式 $\alpha-\delta>0$ 和 $\eta<$ $<\alpha-\delta$。于是由不等式(10)得：

---

① 若定义矩陣 $\boldsymbol{A}=\|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ 的范数为 $\|\boldsymbol{A}\|=\left(\sum_{i,k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，則不难驗証如下的不等式是对的：

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\,|\boldsymbol{x}|.$$

因此，由不等式(4)和等式(8)便可断定

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|\leqslant\|\boldsymbol{U}^{-1}\|\,|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{y})|\leqslant\varepsilon\|\boldsymbol{U}^{-1}\|\,\|\boldsymbol{U}\|\,|\boldsymbol{y}|,$$

因之，在不等式(9)中，可以令

$$\eta=\|\boldsymbol{U}\|\,\|\boldsymbol{U}^{-1}\|\varepsilon.$$

② $\bar{y}_k$ 表示 $y_k(k=1,\cdots,n)$ 的共軛复数。

$$|y| \leqslant |y_0| \text{ 和 } \lim_{t\to\infty} y(t)=0, \tag{11}$$

即方程組(7)的解 $y=0$ 漸近稳定。但矢量 x 和 y 以綫性变换(5)相互联系，故方程組(1)的解 $x=0$ 也漸近稳定①。

引理的证明. 我們先来证明利用形式如(5)的变换 $x=U^{(1)}z$ 可以将微分方程組

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{12}$$

化为这样的形式：1) 从第二个方程以后的各方程右端都不包含第一个变量 z_1，2)在第一个方程中，z_1 的系数等于矩陣 A 的特征数 λ_1，即如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1 z_1 + b'_{12}z_2+\cdots+b'_{1n}z_n,\\ \frac{dz_2}{dt} &= \qquad\quad b'_{22}z_2+\cdots+b'_{2n}z_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dz_n}{dt} &= \qquad\quad b'_{n2}z_2+\cdots+b'_{nn}z_n. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

为此，只要取对应于特征数 λ_1 的固有矢量 u_1($Au_1=\lambda_1 u_1$, $u_1\neq 0$) 作为矩陣 $U^{(1)}$的第一列，而取与 u_1 綫性无关的矢量 $u_2, \cdots, u_n$ 作为 $U^{(1)}$的其余各列(此时 $\det U^{(1)}\neq 0$)就行了。

事实上，变换 $x=U^{(1)}z$ 可以写成

$$x=u_1z_1+u_2z_2+\cdots+u_nz_n, \tag{14}$$

其中 $z_1, \cdots, z_n$ 是矢量 x 在基底 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 中的坐标。方程組(12)有解

$$x=u_1e^{\lambda_1 t}. \tag{15}$$

因此，根据等式(14)，变换后的微分方程組

$$\frac{dz_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}z_k \quad (i=1, \cdots, n) \tag{16}$$

有如下的解：

$$z_1=e^{\lambda_1 t}, \quad z_2=\cdots=z_n=0, \tag{15'}$$

但这只有当 $b'_{11}=\lambda_1$, $b'_{21}=\cdots=b'_{n1}=0$, 即方程組(16)具有(13)的形式时才是可能的。

---

① 根据前頁的脚注 1)，由等式(5)可得如下不等式：

$$|x| \leqslant \|U\|\,|y| \leqslant \|U\|\,|y_0| \leqslant \|U\|\,\|U^{-1}\|\,|x_0|.$$

由于在非奇异綫性变换之下，矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程不变①，故矩陣 $\|b'_{jk}\|_2^n$ 的特征数就是矩陣 $\boldsymbol{A}$ 其余的 $n-1$ 个特征数 $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$。

将类似的变换用于(13)的后 n-1 个方程，如此继續下去，最后便将原微分方程組借非奇异綫性变换化为了如下形式:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dz_1}{dt}=\lambda_1 z_1+b'_{12}z_2+\cdots+b'_{1n}z_n,\\ \dfrac{dz_2}{dt}=\qquad\quad \lambda_2 z_2+\cdots+b'_{2n}z_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{dz_n}{dt}=\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_n z_n.\end{array}\right\} \tag{17}$$

末了，再作最后一次变量变换:

$$z_k=\mu^k y_k \quad (\mu>0;\ \ k=1, \cdots, n),$$

方程組(17)便化为方程組(6)了，而且只要数 $\mu>0$ 取得足够小，它的非对角綫系数 $b_{ik}=\mu^{k-i}b'_{ik}(i<k)$ 的模便可以要多么小就有多么小。引理证毕。

§39. 漸近稳定性准則

在前两节中已經证明，在平稳情况下，任意的(非綫性的)偏差微分方程組，当其綫性近似系数矩陣的特征方程所有的根都有負实部时，零解是漸近稳定的。因此，判定实系数代数方程

$$f(\lambda)\equiv a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \ \ (a_0>0) \tag{1}$$

所有的根都有負实部的必要充分条件有很大的实际意义。

今以 $\lambda_k(k=1, \cdots, g)$ 表示方程(1)的实根，$r_j\pm is_j\left(j=1, \cdots, \dfrac{n-g}{2}\right)$表示方程(1)的复根，并假設在复平面上，这些根全都位于虚

① 矩陣 $\boldsymbol{A}$ 和矩陣 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$(見第 189 頁的上脚注②)的特征方程是相同的。这是因为

$$\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}-\lambda\boldsymbol{E},$$

所以

$$\det(\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}-\lambda\boldsymbol{E})=\det\boldsymbol{U}^{-1}\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\det\boldsymbol{U}=\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})$$

($\boldsymbol{E}$ 是单位矩陣)。

軸左側，即

$$\lambda_k<0,\ r_j<0\left(k=1,\cdots,g;\ j=1,\cdots,\frac{n-g}{2}\right). \tag{2}$$

于是，

$$f(\lambda)=a_0\prod_{k=1}^{g}(\lambda-\lambda_k)\prod_{j=1}^{\frac{n-g}{2}}(\lambda-r_j-is_j)(\lambda-r_j+is_j)=$$

$$=a_0\prod_{k=1}^{g}(\lambda-\lambda_k)\prod_{j=1}^{\frac{n-g}{2}}(\lambda^2-2r_j\lambda+r_j^2+s_j^2). \tag{3}$$

根据不等式(2)，等式(3)最后部分的每个因子都有正的系数，故方程(1)的系数全是正的。因之，为使方程(1)的根全都位于虛軸左側，所有系数均为(在 $a_0>0$ 时)正是必須的，但并不充分。

早在1875年，著名的英国力学家罗司曾給出了一个算法，利用这个算法，根据多項式 $f(\lambda)$ 的系数就可以知道它是否“稳定”，即这多項式所有的根是否都有負实部。1895年，德国数学家霍尔維茨借行列式(“霍尔維茨行列式”)組

$$\Delta_1=a_1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ a_0 & a_2\end{vmatrix},\quad\cdots,\quad \Delta_n=\begin{vmatrix}a_1 & a_3 & a_5 & \cdots\\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots\\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots\\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & a_n\end{vmatrix} \tag{4}$$

(这里处处假設当 $p>n$ 时 $a_p=0$)，以不同的形式与罗司独立地建立了同样的准則。

罗司-霍尔維茨条件[①]. 为使方程(1)所有的根都有負实部，

① 关于罗司-霍尔維茨条件的推导，可以参看，例如，Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, XV 章, §6; Айзерман М. А., Лекции по теории автоматического регулирования, 第2版, II 章, §1. ——这两本书都有中譯本。

必須且只須下列不等式成立:

$$\Delta_1>0, \Delta_2>0, \cdots, \Delta_n>0. \tag{5}$$

若以数字給出方程(1)的系数，条件(5)尚易驗证。但若方程(1)的系数包含某些用字母表示的参数时，在較大的 k 之下，計算 Δ_k 就有一定的困难。

因此，由法国数学家列納尔和希巴尔于1914年所建立的另一些条件是有意义的。在这些条件中，行列式型不等式比在罗司-霍尔維茨条件中約少一半。

列納尔-希巴尔条件。为使多項式

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

在 $a_0>0$ 时所有的根都有負实部，必須且只須

1) 多項式 $f(\lambda)$ 的系数全都是正的:

$$a_1>0, \quad a_2>0, \cdots, a_n>0; \tag{6}$$

2) 下列行列式型不等式成立:

$$\Delta_{n-1}>0, \quad \Delta_{n-3}>0, \cdots \tag{7}$$

(这里和前面一样，Δ_k 表示 k 阶霍尔維茨行列式[①])。

現在我們来介紹一个稳定性的几何准則。

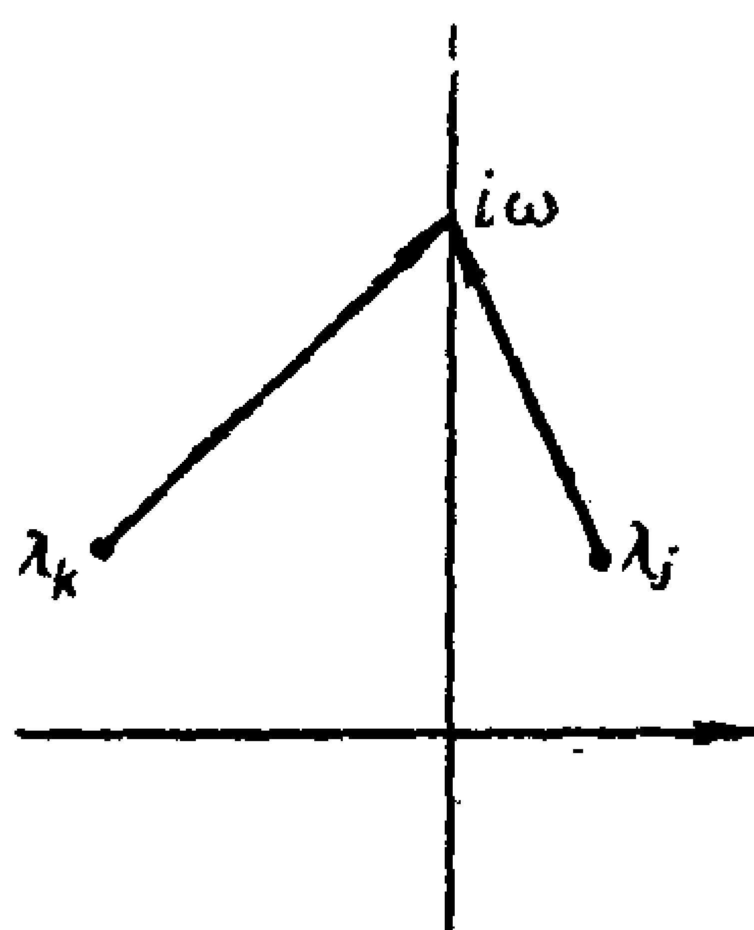


图 47.

在等式[②]

$$f(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)$$

中以 $i\omega$ 代替 λ，并令 ω 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$，則幅角 $\theta = \arg f(i\omega)$ 的相应增量

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty}\theta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg(i\omega - \lambda_k).$$

① 列納尔-希巴尔条件的推导，以及这些条件的某些变相形式均可在前曾引用过的“矩陣論”一书第 IV 章，§3 找到。

② 这里，我們以 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 表示多項式 $f(\lambda)$ 的 n 个根。

我們注意[①](图 47),

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty}\arg(i\omega-\lambda_k)=\begin{cases}\pi, \text{如果 } \mathrm{Re}\lambda_k<0,\\ -\pi, \text{如果 } \mathrm{Re}\lambda_k>0.\end{cases}$$

因此，当以 l 和 r 分别表示位于虚軸 $(l+r=n)$ 左右两側的根的个数时，便有:

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty}\theta(\omega)=(l-r)\pi.$$

現在来考查当 ω 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，复数 $f(i\omega)$ 的附标[②] 所描繪的曲綫。这条曲綫可以分成两支：在一支上 $\omega>0$，在另一支上 $\omega<0$。由于 $f(i\omega)$ 和 $f(-i\omega)$ 是复共軛数，故借对实軸的鏡反射便可由其一支得另一支。因此，若以 Δ_0^∞ 表示当 ω 由 0 变到∞时的增量，则得:

$$\Delta_0^\infty\theta(\omega)=\frac{1}{2}\Delta_{-\infty}^{+\infty}\theta(\omega)=(l-r)\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

由此可見，当

$$\Delta_0^\infty\theta(\omega)=n\frac{\pi}{2} \tag{9}$$

时，所有的根将位于虚軸左側$(l=n, r=0)$。

稳定性的几何准則[③]。为使多項式 $f(\lambda)$ 是稳定的，即其所有的根全位于虚軸左側，則必須且只須:

1) 当 ω 由 0 变到 $+\infty$ 时 $f(i\omega)$ 的速端曲綫(簡称端图)不通过零点[④];

2) 对此端图,

$$\Delta\theta=n\frac{\pi}{2},$$

---

① 这里我們假設，在根 λ_k 中，沒有任何一个根位于虚軸上。

② 在复平面上，与复数 z 对应的点称为复数 z 的附标(аффикс)。

③ 这个准則最先被米哈依洛夫用于自动調节系統的研究中。因此，在技术文献里，稳定性几何准則常称之为米哈依洛夫准則(判据)。

④ 条件 1)意味着 $f(\lambda)$ 沒有純虚根。

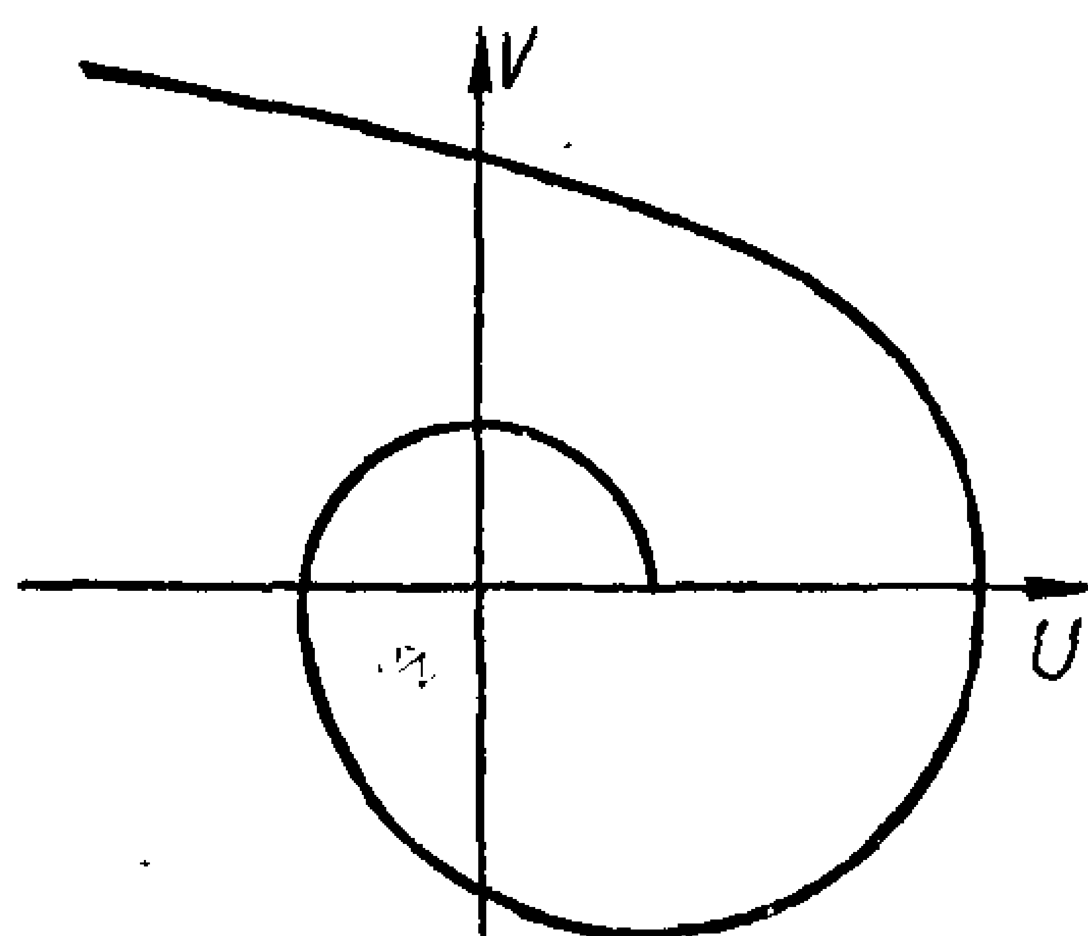


图 48.

其中 n 是多項式 $f(\lambda)$ 的次数(見图 48, 这是 $n=6$ 的情况)。

应当注意，对于稳定多項式①，当 ω 由 0 变到 $+\infty$ 时，幅角 θ 将单調改变。这可由公式

$$\theta(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\arg(i\omega-\lambda_k)$$

看出，因为这样的多项式，其右端每一項都是 ω 的单調递增函数。

例題. 設 $f(\lambda)=\lambda^5+5\lambda^4+10\lambda^3+11\lambda^2+7\lambda+2$, 則 $f(i\omega)=U(\omega)+$ $+iV(\omega)$, 其中

$$U(\omega)=5\omega^4-11\omega^2+2,\quad V(\omega)=\omega(\omega^4-10\omega^2+7).$$

为了作出 $f(i\omega)$ 的端图，我們注意，$U(0)=2$, 而且当 $\omega=0$ 和 $\omega=\omega_1$, $\omega=\omega_2$ $(0<\omega_1<\omega_2)$ 时，$V(\omega)$ 变为零；平方項 ω_1^2 和 ω_2^2 由二次方程决定：

$$\omega_1^2=5-\sqrt{18}\approx 0.76;\quad \omega_2^2=5+\sqrt{18}\approx 9.24.$$

不难驗证，$U(\omega_1)<0$, $U(\omega_2)>0$。此外，$V'(0)=7>0$。

因此，当 $\omega=0$ 时，端图由正实軸开始，先向上走，穿过正虚軸而后又穿过負实軸(当 $\omega=\omega_1$ 时)、負虚軸，最后仍回到正实軸(当 $\omega=\omega_2$ 时)。因为 $n=5$, 故当 $\omega>\omega_2$ 之后，端图便不再穿过坐标軸，而于第一象限內($U>0$, $V>0$)走向无穷远。同时，当 $\omega\to+\infty$ 时，$\operatorname{tg}\theta=\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\to+\infty$。因此，

$$\Delta\theta=5\frac{\pi}{2},$$

即 $f(\lambda)$ 是稳定多項式。

由于 $f(\lambda)$ 的系数全是正的，而且

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 11\\ 1 & 10\end{vmatrix}>0,\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}5 & 11 & 2 & 0\\ 1 & 10 & 7 & 0\\ 0 & 5 & 11 & 2\\ 0 & 1 & 10 & 7\end{vmatrix}>0,$$

故由列納尔-希巴尔准則出发，也可以得到同样的結論。

① 稳定多項式也叫做霍尔維茨多項式。

第六章　微振动

§40. 保守系統的微振动

如果取平稳系統在初始时刻的位置充分靠近它的稳定平衡位置，而且初始速度的絕对值也很小，則在整个运动过程中，无論是离开平衡位置的偏差还是广义速度，按其絕对值也都将非常小。这种情况，就使得我們可以在运动微分方程中仅保留偏差和速度的綫性項，而将其高阶小項丢掉。于是，运动微分方程便成为綫性的，即問題被"綫性化"了。这一节我們将討論保守系統运动方程的綫性化問題。

n 自由度保守系統的动能和势能可以通过独立坐标 q_i 和广义速度 $\dot{q}_i (i=1, \cdots, n)$ 写成如下形式:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \cdots, q_n)\dot{q}_i\dot{q}_k,\ \Pi=\Pi(q_1, \cdots, q_n). \tag{1}$$

仿照前一章那样，将坐标原点 $q_1=\cdots=q_n=0$ 取在平衡位置上，并在此位置令 $\Pi=0$。将系数 $a_{ik}(q_1, \cdots, q_n)$ 按坐标的冪展成級数:

$$a_{ik}(q_1, \cdots, q_n)=a_{ik}+\cdots(i, k=1, \cdots, n), \tag{2}$$

式中 $a_{ik}=a_{ik}(0, \cdots, 0)$ $(a_{ik}=a_{ki};\ i, k=1, \cdots, n)$是常数。将系数的这些表达式代入动能公式(1)，則得:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k+(**), \tag{3}$$

其中(**)表示 q_i 和 $\dot{q}_i(i=1, \cdots, n)$的三次及更高次項的和。

将势能也按坐标的冪展成級数:

$$\Pi=\Pi_0+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\partial q_k}\right)_0 q_iq_k+(**).$$

前已約定：$\Pi_0=0$。此外，在平衡位置广义力等于零：

$$Q_i^0=\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)_0=0\quad(i=1,\cdots,n).$$

因此，若引入記号

$$c_{ik}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\partial q_k}\right)_0\ (c_{ik}=c_{ki};\quad i,k=1,\cdots,n),\tag{4}$$

則势能便可以写成如下形式：

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}q_iq_k+(**).\tag{5}$$

在公式(3)和(5)中，丢掉 q_i 和 $\dot{q}_k$ 的三次及更高次小項，則动能和势能便可以写成常系数二次型的形式：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k,\quad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}q_iq_k,\tag{6}$$

其中 $a_{ik}=a_{ki}$，$c_{ik}=c_{ki}(i,k=1,\cdots,n)$.

由动能的物理意义可知，恒有 $T\geqslant0$. 由于我們假設平衡位置不是奇点[①]，所以只要不是所有的广义速度同时为零，便永远有 $T>0$，即二次型 $\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k=2T$ 是正定的：

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k>0\quad\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2>0\right).\tag{7}$$

其次，为了保证平衡位置的稳定性，根据拉格朗日定理，就要求势能在平衡位置有严格极小值。由于 $\Pi_0=0$，这就意味着在坐标原点的某邻域內，

① 見第40頁的脚注。

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_iq_k>0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n}q_i^2>0\right). \tag{8}$$

但二次型(8)乃是坐标的二次齐次函数。因之，不等式(8)将在除坐标原点而外的整个空間处处成立，而在坐标原点此二次型为零。換句話說，势能也可以写成坐标的正定二次型①。

我們从T和Π的表达式(6)出发来建立拉格朗日方程，得：

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k+c_{ik}q_k)=0 \qquad (i=1,\cdots,n). \tag{9}$$

現在来找这个綫性微分方程組如下形式的特解：

$$q_i=u_i\sin(\omega t+\alpha)\,(i=1,\cdots,n), \tag{10}$$

即对于所有的坐标有同一个頻率ω和同一个常数α的諧振动。

将q_i的表达式(10)代入微分方程組(9)，并令

$$\lambda=\omega^2, \tag{11}$$

则当約去$\sin(\omega t+\alpha)$之后，我們便得到一組代数方程，它关于振幅u_i②是綫性的：

$$\sum_{k=1}^{n}(c_{ik}-\lambda a_{ik})u_k=0 \ \ (i=1,\cdots,n). \tag{12}$$

因为待求振动的所有振幅u_i不应全为零，故齐次方程(12)的系数行列式必須等于零：

① 当然，也可能出現这样的情况：函数$\Pi(q_1,\cdots,q_n)$在略去(* *)項之前，在坐标原点有严格极小値，而在略去这些項之后，在原点有非严格极小值（例如，$\Pi=c^2(q_1+\cdots+q_n)^2+d^2(q_1^4+\cdots+q_n^4)$，$c>0$，$d>0$）。但是，我們认为这是特殊情况，不在考虑之列。在这种特殊情况下，略去Π中的(* *)項是不行的。这样做的結果将使运动图象变得面目全非。

② 虽然实际上振幅是指絕对值$|u_i|$，但这里我們就将u_i叫作关于坐标q_i的諧振动(10)的振幅；而諧振动(10)(当$t=0$时)的初相位，当$u_i>0$时是α，当$u_i<0$时是$-\alpha$。

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda a_{11} & c_{12}-\lambda a_{12} \cdots c_{1n}-\lambda a_{1n} \\ c_{21}-\lambda a_{21} & c_{22}-\lambda a_{22} \cdots c_{2n}-\lambda a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}-\lambda a_{n1} & c_{n2}-\lambda a_{n2} \cdots c_{nn}-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

展开行列式之后，在左端就得到一个关于 λ 的 n 次多項式。因此，所求的諧和解 (10) 的頻率平方 $\lambda=\omega^2$ 应满足 n 次代数方程 (13)。方程(13)称为长期方程或頻率方程。

对于方程(13)的每一个根，都有微分方程組(9) (包含一任意常数 α)的一組特解(10)与之对应。在此特解中 $\omega=\sqrt{\lambda}$。

現在将前面所导出的公式写成矩陣形式。为此，引入两个对称的正定矩陣①

$$\boldsymbol{A}=\|a_{ik}\|=\begin{Vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{C}=\|c_{ik}\|=\begin{Vmatrix} c_{11} \cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} \cdots c_{nn} \end{Vmatrix} \tag{14}$$

和矢量列

$$\boldsymbol{q}=\begin{Vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}=\begin{Vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix} \tag{15}$$

($\boldsymbol{u}$ 是振幅矢量)。于是，微分方程組(9)可写成如下形式

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}=0. \tag{16}$$

特解(10)可写成

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}\sin(\omega t+\alpha). \tag{17}$$

将解(17)代入方程(16)而得到的代数方程組(12)有如下形式:

$$(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=0 \qquad (\lambda=\omega^2). \tag{18}$$

頻率方程可以写作:

① 如果与对称矩陣 $\boldsymbol{A}=\|a_{ik}\|_1^n$ 相对应的二次型 $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_iq_k$ 是正定的，则称矩陣 $\boldsymbol{A}$ 为正定的。

$$\det(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{A})=0\ (\lambda=\omega^2). \tag{19}$$

为了証明长期方程(19)的根永远是正实数，我們先来考察实系数二次型的若干性质。

每个二次型 $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iu_k$ 都和一个双綫性型 $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iv_k$ 相对应。对此双綫性型，引入如下的簡写記号:

$$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iv_k.$$

这样，二次型本身便可写作

$$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iu_k.$$

不难驗证双綫性型的以下性质:

1°. $A(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v})=A(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v})+A(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v})$.

2°. $A(\lambda\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\lambda A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ (λ 是純量).

3°. $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$①.

还可以证明，对于任何复矢量 $\boldsymbol{u}$,

4°. $A(\boldsymbol{u},\bar{\boldsymbol{u}})$是实数②。

事实上，若令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+i\boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 都是实的矢量列)，則根据1°—3°，便有

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{u},\bar{\boldsymbol{u}})&=A(\boldsymbol{v}+i\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}-i\boldsymbol{w})=\\&=A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})-iA(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+iA(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})+A(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})=\\&=A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})+A(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}).\end{aligned} \tag{20}$$

上式最后的表达式显然是实的。

---

① 和等式1°、2°不同，等式3°只是对于具有对称系数矩陣的双綫性型才是正确的。

② 在字母上划一横綫，表示取其复共軛量。性质4°仅对实元素对称矩陣是正确的。

由等式(20)还可推知

5°. 若 $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ 是一个正定二次型，而 $\boldsymbol{u}\neq 0$ 是任意的复矢量，则

$$A(\boldsymbol{u},\bar{\boldsymbol{u}})>0 \quad (\boldsymbol{u}\neq 0). \tag{21}$$

事实上，若令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+i\boldsymbol{w}$，则有 $A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\geqslant 0, A(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})\geqslant 0$。由 $\boldsymbol{u}\neq 0$ 可知不等式 $\boldsymbol{v}\neq 0$ 和 $\boldsymbol{w}\neq 0$ 中至少有一个成立，因而关系式 $A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geqslant 0$ 和 $A(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})\geqslant 0$ 中有 $>$ 号成立。于是由等式(20)便得到不等式(21)。

現在来证明

6°. 若 λ 是长期方程 $\det(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{A})=0$ 的根，$\boldsymbol{u}$ 是对应的振幅矢量[見(18)]:

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \quad (\boldsymbol{u}\neq 0), \tag{22}$$

则对于任意的矢量 $\boldsymbol{v}$，有

$$C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\lambda A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}). \tag{23}$$

事实上，等式(22)的純量写法为

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}u_k=\lambda\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k \quad (i=1,\cdots,n). \tag{22'}$$

今以 v_i 乘(22′)式第 i 个方程的两端，并按 i 求和，则得:

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}v_iu_k=\lambda\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}v_iu_k,$$

即等式(23)。

現在来证明，与长期方程二不同根 λ 和 $\lambda'(\lambda\neq\lambda')$ 相对应的任意二振幅矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$ 满足关系式①

① 若在 n 維空間中引入度量 $\boldsymbol{A}$，即将二次型

$$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iu_k$$

的值理解作矢量 $\boldsymbol{u}$ 的长度平方，則 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')$ 便是矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$ 在此度量下的"数量积"。因此等式(24)表示出振幅矢量的如下性质：与长期方程不同的根相对应的振幅矢量在度量 $\boldsymbol{A}$ 之下永远是相互正交的。

$$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')=0. \tag{24}$$

事实上，根据6°，如下的两个等式成立：

$$C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')=\lambda A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'),\quad C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')=\lambda' A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'). \tag{25}$$

但 $\lambda\neq\lambda'$。故由等式(25)得关系式(24)[①]。

現在来证明，由矩陣 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的对称性以及矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的正定性，可以断定长期方程(13)[或(19)]仅有实根。

事实上，假設 λ 是长期方程的一个根，且对应的复矢量 $\boldsymbol{u}\neq 0$。于是 $\bar{\lambda}$ 也是长期方程的根，对应的振幅矢量为 $\bar{\boldsymbol{u}}$。由于 $\lambda\neq\bar{\lambda}$，则如前所证，$A(\boldsymbol{u},\bar{\boldsymbol{u}})=0$，和不等式(21)矛盾。

若 λ 是实的，则对应振幅矢量 $\boldsymbol{u}\neq 0$ 也可以取成实的。于是，当令(23)中的 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ 时，并注意到 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})>0$，便有

$$\lambda=\frac{C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}{A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}. \tag{26}$$

但在我們所討論的情况下，二次型 $C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\sum\limits_{i,k=1}^{n}c_{ik}u_iu_k$ 也是正定的。于是，不仅 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})>0$，还有 $C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})>0$。因之，$\lambda>0$。

因此，长期方程(13)有 n 个正根 λ_j，和它相对应的是实的正频率 $\omega_j=\sqrt{\lambda_j}$ 和实的振幅矢量 $\boldsymbol{u}_j(j=1,\cdots,n)$。

我們先来考察当长期方程所有的根互不相同时的情况。与每个 λ_j 相对应的是振幅矢量为 $\boldsymbol{u}_j$ 的特解

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}_j\sin(\omega_j t+\alpha_j)\quad(\omega_j=\sqrt{\lambda_j}), \tag{27}$$

而矢量 $\boldsymbol{u}_j$ 的坐标 $u_{1j},\cdots,u_{nj}$ 应满足綫性方程組

$$\sum_{k=1}^{n}(c_{ik}-\lambda_j a_{ik})u_{kj}=0\quad(i=1,\cdots,n), \tag{28}$$

或矩陣形式的方程

① 由等式(25)可知，在等式 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')=0$ 成立的同时，等式 $C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')=0$ 也成立。

$$(\boldsymbol{C}-\lambda_j\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}_j=0. \tag{29}$$

因为微分方程組(9)[或(16)]是綫性的，故解(27)的常系数綫性組合仍然是該方程組的解。因此，在任意常数 C_j, $\alpha_j(j=1,\cdots,n)$之下，

$$\boldsymbol{q}=\sum_{j=1}^{n}C_j\boldsymbol{u}_j\sin(\omega_j t+\alpha_j)(\omega_j=\sqrt{\lambda_j};\ j=1,\cdots,n) \tag{30}$$

是方程組 (9) 或(16)的解。我們来证明公式(30)包括系統的所有运动。

首先证明 n 个振幅矢量 $\boldsymbol{u}_j(j=1,\cdots,n)$綫性无关[①]。事实上，假設

$$\sum_{j=1}^{n}c_j\boldsymbol{u}_j=0.$$

那末对于任何固定的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，便有

$$0=A\left(\boldsymbol{u}_k,\sum_{j=1}^{n}c_j\boldsymbol{u}_j\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jA(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_j). \tag{31}$$

但当 $k\neq j$ 时，$A(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_j)=0$，当 $k=j$ 时，$A(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_j)>0$。因之，由等式(31)便有

$$c_k=0\ \ (k=1,\cdots,n),$$

即矢量 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 不可能綫性相关。

現在来选擇公式(30)中的任意常数 C_j 和 α_j 使之滿足預先給定的任何初始条件

$$q_i(0)=q_{i0},\ \ \dot{q}_i(0)=\dot{q}_{i0}(i=1,\cdots,n), \tag{32}$$

或按矩陣形式写成

$$\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{q}_0,\ \ \dot{\boldsymbol{q}}(0)=\dot{\boldsymbol{q}}_0. \tag{33}$$

由公式(30)得:

① 对于 $\boldsymbol{A}$ 是单位矩陣的特殊情况，这个論断曾在§37中证明过。

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{q}_0 &= \sum_{j=1}^{n} C_j \sin\alpha_j \boldsymbol{u}_j, \\
\dot{\boldsymbol{q}}_0 &= \sum_{j=1}^{n} \omega_j C_j \cos\alpha_j \boldsymbol{u}_j.
\end{aligned}\right\} \tag{34}
$$

根据矢量 $\boldsymbol{u}_j(j=1, \cdots, n)$ 的綫性无关性，由此即可唯一地确定乘积 $C_j\sin\alpha_j$ 和 $\omega_j C_j\cos\alpha_j$；又因为 $\omega_j \neq 0$，故任意常数 C_j 和 $\alpha_j(j= =1, \cdots, n)$的值也被唯一确定①。

因此，在长期方程无重根的情况下，公式(30)包括了系統的所有振动②。

若频率方程有重根，則仍然可以断定，在任何 m（頻率方程不同的根 λ_j 的个数）的情况下，仍有形式如 $\boldsymbol{u}\sin(\omega t+\alpha)$的解。

拉格朗日曾經认为，在重頻率的情况下，方程組(9)的通解不再有(30)的形式，在公式(30)的右端将有如下形式的所謂长期項出現:

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'t+\boldsymbol{u}''t^2+\cdots)\sin(\omega t+\alpha).$$

但是拉格朗日弄錯了。正如后来維尔斯特拉斯所证明的那样，对于每个 p 重根 λ_j，綫性方程組(12)恰好有 p 个綫性无关解与之对应，即对于每个 p 重根 λ_j，都可以得到 p 个綫性无关的振幅矢量。因此，即使有重頻率，也有 n 个綫性无关的振幅矢量存在，借这些振幅矢量所构成的公式(30)便給出在此情况下的通解。

振动

$$\boldsymbol{q}=C_j\boldsymbol{u}_j\sin(\omega_j t+\alpha_j) \quad (j=1, \cdots, n) \tag{35}$$

称为系統的主振动，由主振动可以构成系統的任何振动。

① α_j 可确定到相差一常数項的精确程度，这个常数項等于 2π 的整数培。

② 振幅矢量 $\boldsymbol{u}_j$ 滿足关系

$$A(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_h)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{ij}u_{kh}=0 \quad (j\neq h;\ j, h=1, \cdots, n).$$

在一般情况下(即包括存在重频率的情况)，公式(30)的严格推导可借下节所謂的"简正坐标"方法給出。在这个推导中，長期方程的重根不再表現出任何特殊性。

例题. 耦合摆。质量为m，长为l的两个相同的数学摆，其悬挂点位于同一水平綫上。在摆上离悬挂点为h $(0\leq h\leq l)$的地方，用弹簧将两个摆联結起来。当两个摆都在鉛直位置时，弹簧处于自由状态。求此系統在鉛直平面內的振动。

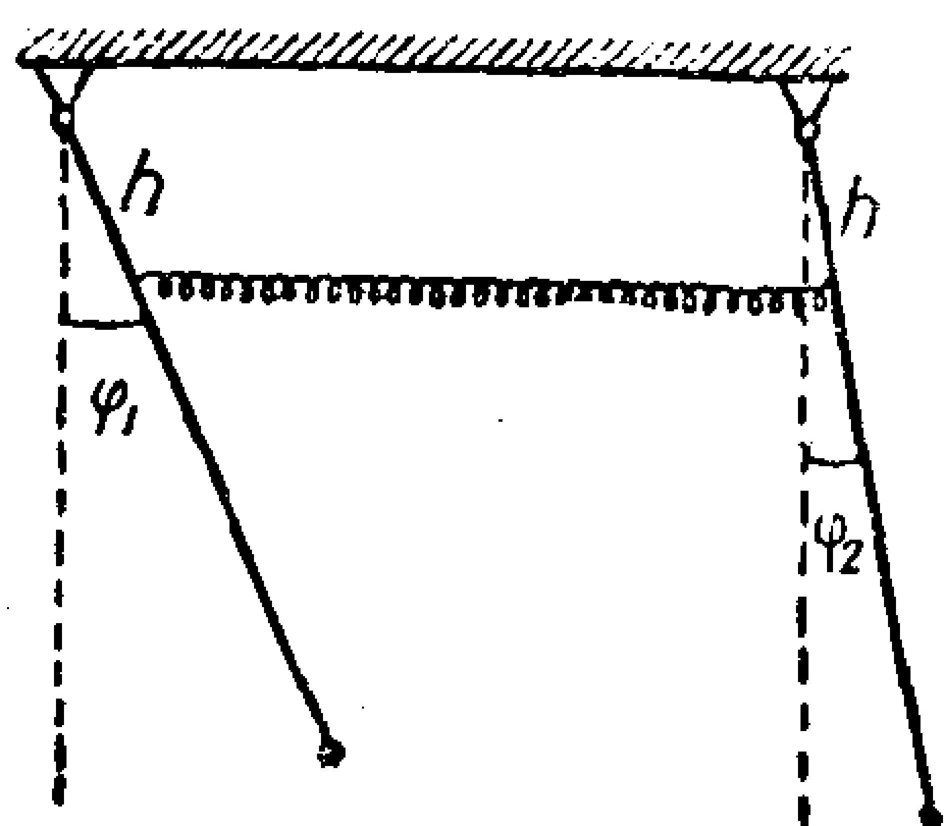


图 49.

我們取摆与鉛直綫之間的夾角φ_1和φ_2作独立坐标(图 49)。在平衡位置，$\varphi_1=\varphi_2=0$。略去高阶小量，弹簧的伸长$h|\sin\varphi_2-\sin\varphi_1|\approx h|\varphi_2-\varphi_1|$。因此，在所給的情况下，

$$T=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2),$$

$$\Pi=mgl(1-\cos\varphi_1)+mgl(1-\cos\varphi_2)+\frac{\gamma h^2(\varphi_2-\varphi_1)^2}{2}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}mgl(\varphi_1^2+\varphi_2^2)+\frac{1}{2}\gamma h^2(\varphi_2-\varphi_1)^2+\cdots.$$

若在Π中只保留平方項，最后便有：

$$T=\frac{1}{2}a(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2),$$

$$\Pi=\frac{1}{2}c(\varphi_1^2+\varphi_2^2)-b\varphi_1\varphi_2,$$

其中

$$a=ml^2,\quad c=mgl+\gamma h^2,\quad b=\gamma h^2.$$

频率方程为：

$$\begin{vmatrix} c-\lambda a & -b \\ -b & c-\lambda a \end{vmatrix}=0\quad(\lambda=\omega^2);$$

确定主振动振幅的两个方程(这两个方程不独立)中的一个为：

$$(c-\lambda a)u_1-bu_2=0,\ \text{即}\ \frac{u_1}{u_2}=\frac{b}{c-\lambda a}.$$

由频率方程得：

$$\omega_1^2=\lambda_1=\frac{c-b}{a}=\frac{g}{l},\quad \omega_2^2=\lambda_2=\frac{c+b}{a}=\frac{g}{l}+2\frac{\gamma}{m}\frac{h^2}{l^2}.$$

对于第一主振动，$u_1 = u_2 = C_1$，即

$$\varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad (\varphi_1 = \varphi_2),$$

对于第二主振动，$u_1 = -u_2 = C_2$，即

$$\varphi_1 = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \varphi_2 = -C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (\varphi_1 = -\varphi_2).$$

在第一主振动中，两个摆的相位总是相同的，彈簧沒有伸縮，两个摆相互之間沒有任何影响。在第二主振动中，两个摆的相位永远相反。

将二主振动叠加可得任何振动：

$$\varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

§ 41. 簡正坐标

两个二次型

$$A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k \text{ 和 } C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k \tag{1}$$

中，如果至少有一个是正定的，例如 $A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$，則总可以用同一个非奇异的变量变换

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \theta_j \quad (i = 1, \cdots, n; \ \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0), \tag{2}$$

将它們同时化为平方和[1]：

$$A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2, \ C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j^2. \tag{3}$$

同时，因为型 $C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ 也是正定的（見 § 40），故所有 $\lambda_j > 0$。

由于广义速度 $\dot{q}_i$ 和 $\dot{\theta}_j$ 之間的关系

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \dot{\theta}_j \quad (i = 1, \cdots, n)$$

与 q_i 和 θ_j 之間的关系一样，故(3)式头一个等式中的 q_i 和 θ_j 可代之以 $\dot{q}_i$ 和 $\dot{\theta}_j$，于是得到动能和位能的如下表达式：

① 見，例如，前面第 193 頁上曾引用过的"矩陣論"一书第 X 章，§ 6。

$$
\left.\begin{aligned}
T&=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\dot{\theta}_j^2,\\
\Pi&=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}q_iq_k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\theta_j^2.
\end{aligned}\right\}\tag{4}
$$

变量 θ_1, …, θ_n 叫做简正坐标或主坐标。将任意坐标化为简正坐标的变换式(2)也可以写成如下的矢量形式:

$$
\boldsymbol{q}=\sum_{j=1}^{n}\theta_j\boldsymbol{u}_j,\tag{5}
$$

其中

$$
\boldsymbol{q}=\begin{Vmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_n\end{Vmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_j=\begin{Vmatrix}u_{1j}\\ \vdots\\ u_{nj}\end{Vmatrix}(j=1,\cdots,n).
$$

因为坐标变换(2)是非奇异的，故行列式 $\det(u_{ij})_{i,j=1}^{n}\neq0$，即矢量 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 綫性无关。

利用 T 和 Π 在簡正坐标中的簡单表达式(4)，得此坐标中的拉格朗日方程如下:

$$
\ddot{\theta}_j+\lambda_j\theta_j=0\quad(j=1,\cdots,n).\tag{6}
$$

每一个这样的方程只包含一个未知函数。如所周知，方程(6)的通解規定一諧振动

$$
\theta_j=C_j\sin(\omega_jt+\alpha_j)\quad(j=1,\cdots,n),\tag{7}
$$

其中 C_j 和 $\alpha_j(j=1,\ \cdots,\ n)$ 是任意常数。将这些表达式代入公式(5)，则得振动的一般公式

$$
\boldsymbol{q}=\sum_{j=1}^{n}C_j\boldsymbol{u}_j\sin(\omega_jt+\alpha_j).\tag{8}
$$

这样，我們便严格地证明了这公式在最一般情况下包括保守系統的所有微振动[①]。

① 在前一节中，我們曾仅就长期方程无重根的情况証明了这个公式。

在(8)式中，令 C_j 和 α_j 以外的一切任意常数都等于零，便得到第 j 个"主諧振动"

$$\boldsymbol{q}=C_j\boldsymbol{u}_j\sin(\omega_j t+\alpha_j). \tag{9}$$

(在簡正坐标中，当只有 θ_j 在变化，而所有的 $\theta_i=0(i\neq j)$时，所实現的正是这一振动。)在前一节中已經证明，頻率的平方 $\lambda_j=\omega_j^2$ 滿足頻率方程。因为除了一般公式(8)所包含的諧振动項而外，形式如(9)的其他諧振动对于 $\boldsymbol{q}$ 不存在，故 $\lambda_j=\omega_j^2(j=1,\cdots,n)$ 是長期方程的全部根。此外，如果某个根在此重复出現 p 次，則必有 p 个綫性无关的振幅矢量 $\boldsymbol{u}_j$ 与之对应，这些振幅矢量可由前节的綫性方程組(28)或(29)来确定。

这样，我們便重新证明了长期方程的一切根 λ_j 都是正实数；也重新证明了 n 个頻率 $\omega_j=\sqrt{\lambda_j}$ 对应于 n 个綫性无关的振幅矢量 $\boldsymbol{u}_j(j=1,\cdots,n)$。

将 $\boldsymbol{q}$ 的表达式(5)代入 $A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})$，便得到：

$$A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})=A\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j\boldsymbol{u}_j,\sum_{h=1}^{n}\theta_h\boldsymbol{u}_h\right)=\sum_{j,h=1}^{n}A(\boldsymbol{u}_j,\boldsymbol{u}_h)\theta_j\theta_h. \tag{10}$$

另一方面

$$A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})=\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2. \tag{11}$$

将等式(10)和(11)加以比較，即得关于振幅矢量 $\boldsymbol{u}_j$ $(j=1,\cdots,n)$(利用这些矢量就可以按公式(5)来实現向簡正坐标的过渡)的如下关系[①]：

$$A(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad (i,j=1,\cdots,n). \tag{12}$$

---

① 換句話說，在度量 $\boldsymbol{A}$(見第 202 頁上的脚注①)之下，矢量 $\boldsymbol{u}_j(j=1,\cdots,n)$是正交的。

§42. 周期性外力对保守系統振动的影响

假設除有势力 $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ 而外，在系統上还作用有某些力 $Q_i = Q_i(t)\ (i=1, \cdots, n)$。今借公式

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\theta_j \quad (i=1, \cdots, n;\ \det(u_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0) \tag{1}$$

轉换到簡正坐标上去。

和坐标 q_i 中的力 $Q_i(i=1, \cdots, n)$ 相对应的是坐标 θ_j 中的力 $\Theta_j(j=1, \cdots, n)$。我們从力的元功表达式

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \delta\theta_j \tag{2}$$

出发来建立 Q_i 和 Θ_j 之間的关系。

注意，由公式(1)可得

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\delta\theta_j \quad (i=1, \cdots, n), \tag{3}$$

将 δq_i 的这些表达式代入等式(2)，便得到：

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij}Q_i\right)\delta\theta_j = \sum_{j=1}^{n}\Theta_j\delta\theta_j. \tag{4}$$

由此，令簡正坐标独立增量 $\delta\theta_j$ 的系数相等，便得到：

$$\Theta_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij}Q_i \quad (j=1, \cdots, n). \tag{5}$$

因此，若借矩陣 $\boldsymbol{U} = \|u_{ij}\|$ 可将"老坐标" q_i 通过"新坐标" θ_j 表出：

$$q_1 = u_{11}\theta_1 + u_{12}\theta_2 + \cdots + u_{1n}\theta_n,$$

$$q_2 = u_{21}\theta_1 + u_{22}\theta_2 + \cdots + u_{2n}\theta_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\theta},\ \det\boldsymbol{U} \neq 0),$$

$$q_n = u_{n1}\theta_1 + u_{n2}\theta_2 + \cdots + u_{nn}\theta_n, \tag{6}$$

則“新的”广义力 Θ_j 可借轉置矩陣 U' 通过“老的”广义力 Q_i 表出:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= u_{11}Q_1 + u_{21}Q_2 + \cdots + u_{n1}Q_n, \\ \Theta_2 &= u_{12}Q_1 + u_{22}Q_2 + \cdots + u_{n2}Q_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Theta_n &= u_{1n}Q_1 + u_{2n}Q_2 + \cdots + u_{nn}Q_n. \end{aligned}\right\} \quad (\Theta = U'Q). \tag{7}$$

将矩陣公式 $q = U\theta$ 和 $Q = (U')^{-1}\Theta$ 进行比較，就可以看出，当由坐标过渡到力时，变换矩陣 U 为矩陣 $(U')^{-1}$① 所代替。

也可以用这样一句話来說: 广义力的变换与坐标的变换相反②。

知道了如何按給定的 Q_i 来确定 Θ_j 之后，便可以利用前节中关于 T 和 Π 的表达式(4)写出簡正坐标中的拉格朗日方程:

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2\theta_j = \Theta_j(t) \quad (j = 1, \cdots, n). \tag{8}$$

我們以 $\theta_j^*(j=1,\cdots,n)$ 表示方程(8)的任意一組特解。于是，方程(8)的通解为:

$$\theta_j = C_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \theta_j^* \quad (j = 1, \cdots, n). \tag{9}$$

設 $\Theta_j(t)$ 是頻率为 Ω 的正弦型周期力:

$$\Theta_j(t) = A_j \sin \Omega t, \tag{10}$$

則不难看出，可取

$$\theta_j^* = \frac{A_j}{\omega_j^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \tag{11}$$

作为方程(8)的特解。如果 $Q_i(t)(i=1,\cdots,n)$，因而 $\Theta(t)$ $(j=1,\cdots,n)$ 是以 τ 为周期(頻率 $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$) 的任意周期力，則 $\Theta_j(t)$ 可以展成福里哀級数:

---

① 若 $U = \|u_{ij}\|_1^n$ 是正交矩陣，則 $(U')^{-1} = U$，因而力和坐标按同一方式变换。

② 在坐标变换为非綫性变换的一般情况下，广义力的变换和坐标微分的变换相反。

$$\Theta_j(t)=\sum_{m=0}^{\infty}A_{jm}\sin(m\Omega t+\varphi_{jm})(j=1,\cdots,n).\qquad(12)$$

于是，由方程(8)的綫性型可知

$$\theta_j^*=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{jm}}{\omega_j^2-m^2\Omega^2}\sin(m\Omega t+\varphi_{jm})(j=1,\cdots,n).\qquad(13)$$

若某一个 $m\Omega$ 和 ω_j 重合，而且对应的 $A_{jm}\neq0$，則对于坐标 θ_j 将出現共振現象。

将 θ_j 的表达式(9)代入公式

$$\boldsymbol{q}=\sum_{j=1}^{n}\theta_j\boldsymbol{u}_j,$$

則得

$$\boldsymbol{q}=\widehat{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{q}^*,\qquad(14)$$

其中

$$\widehat{\boldsymbol{q}}=\sum_{j=1}^{n}C_j\boldsymbol{u}_j\sin(\omega_jt+\alpha_j)\qquad(15)$$

是自由振动，而

$$\boldsymbol{q}^*=\sum_{j=1}^{n}\theta_j^*\boldsymbol{u}_j$$

是系統的强迫振动，$\boldsymbol{u}_j$ 是坐标为 $u_{1j},u_{2j},\cdots,u_{nj}(j=1,\cdots,n)$ 的振幅矢量。

§ 43. 保守系統頻率的极端性质·頻率随系統慣性和剛性而变的瑞利定理·約束对頻率的影响*

在§41中我們曾經討論了过渡到簡正坐标 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 的非奇异綫性坐标变换

---

*这个标題原书为“約束的施加”(Наложение связей)，为了更明确地标出正文內容，譯者将它改成这样。

$$\boldsymbol{q}=\sum_{j=1}^{n}\theta_j\boldsymbol{u}_j, \tag{1}$$

或数量形式的写法

$$q_i=\sum_{j=1}^{n}u_{ij}\theta_j\quad(i=1,\cdots,n;\det(u_{ij})_{i,j=1}^{n}\neq 0); \tag{1'}$$

在簡正坐标中，二次型①

$$A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}q_iq_k,\qquad C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})=\sum_{i,k=1}^{n}C_{ik}q_iq_k \tag{2}$$

有如下的簡单("正則")形式:

$$A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})=\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2,\qquad C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})=\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2\theta_j^2. \tag{3}$$

往后我們将认为主振动的标号是按頻率增大的順序排的:

$$\omega_1\leqslant\omega_2\leqslant\cdots\leqslant\omega_n. \tag{4}$$

我們来考察对于任意的 $\boldsymbol{q}\neq 0$(也就是对于 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 的任意一組不同时为零的值)，(3)中两个二次型之比:

$$\frac{C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}=\frac{\omega_1^2\theta_1^2+\omega_2^2\theta_2^2+\cdots+\omega_n^2\theta_n^2}{\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_n^2}. \tag{5}$$

将上式分子中所有的 ω_j^2 都换成小于或等于它的数 ω_1^2，則得:

$$\frac{C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}\geqslant\omega_1^2. \tag{6}$$

另一方面，从公式(5)可以直接看出，当 $\theta_2=\cdots=\theta_n=0$ 时，比值 $\dfrac{C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}$ 将达到 ω_1^2。因此，

$$\omega_1^2=\min\frac{C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}{}^{②}. \tag{7}$$

---

① $C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})$为势能的二倍；将二倍动能表达式 $A(\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}})$中的 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 换成 $\boldsymbol{q}$ 即得 $A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})$。

② 如果在数軸上取 n 个点 $\omega_1^2,\ \omega_2^2,\cdots,\ \omega_n^2$，在每个点上放置一个质点，它們的质量分别为 $m_1=\theta_1^2,\ m_2=\theta_2^2,\cdots,\ m_n=\theta_n^2$，則按公式(5)，比值$\dfrac{C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}$就应当是这些点的质量中心的坐标。由此立即可得关系式(6)和(7)，因为质量中心总是在二边界点之間，而且当边上一个点以外的其它各点质量均为零时，质心便落在該点上。

現在在系統上施加一綫性齐次約束①:

$$l_1q_1+l_2q_2+\cdots+l_nq_n=0\left(\sum_{i=1}^{n}l_i^2>0\right). \tag{8}$$

借变换(1)将这里的 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 用簡正坐标表出，則在簡正坐标中約束仍然是綫性齐次的:

$$l_1'\theta_1+l_2'\theta_2+\cdots+l_n'\theta_n=0\left(\sum_{j=1}^{n}l_j'^2>0\right). \tag{8'}$$

我們将約束(8)或(8′)都簡单地写作

$$L=0.$$

显然，总可以找到 θ_1 和 θ_2 这样的值：它和 $\theta_3=\cdots=\theta_n=0$ 一起滿足約束方程(8′)。对于相应的 $\boldsymbol{q}$，按公式(5)便有:

$$\frac{C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}=\frac{\omega_1^2\theta_1^2+\omega_2^2\theta_2^2}{\theta_1^2+\theta_2^2}\leqslant\omega_2^2.$$

因之，有②

$$\min_{L=0}\frac{C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}\leqslant\omega_2^2. \tag{9}$$

現在給約束 $L=0$ 以变更，則不等式(9)的左端将发生改变，但却永远小于或等于 ω_2^2。在形式为 $\theta_1=0$ 的約束(即 $l_1'=1, l_2'=\cdots=l_n'=0$)之下，比值 $\dfrac{C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}$ 由公式

---

① 如果給的是非綫性約束，而且平衡位置滿足約束方程，則約束方程左端的冪級数展开式中无自由項:

$$l_1q_1+l_2q_2+\cdots+l_nq_n+\sum_{i,k=1}^{n}l_{ik}q_iq_k+\cdots=0.$$

此外，我們还假設綫性項的确存在，即 $\sum_{i=1}^{n}l_i^2>0$。于是，当略去二阶及更高阶小量的項之后，約束方程便可以写成(8)的形式。

② 不等式(9)左方的符号表示当矢量 $\boldsymbol{q}\neq0$ 滿足約束方程(8)时，$\dfrac{C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})}$ 的最小值。

$$\frac{C(q,q)}{A(q,q)}=\frac{\omega_2^2\theta_2^2+\cdots+\omega_n^2\theta_n^2}{\theta_2^2+\cdots+\theta_n^2}$$

給出，因之，[与公式(5)和(7)相类似]有

$$\min_{\theta_1=0}\frac{C(q,q)}{A(q,q)}=\omega_2^2.$$

因此，在所有形如$L=0$的約束中，量

$$\min_{L=0}\frac{C(q,q)}{A(q,q)}$$

在約束$\theta_1=0$之下达到最大值ω_2^2。因之，

$$\max\min_{L=0}\frac{C(q,q)}{A(q,q)}=\omega_2^2. \tag{10}$$

来代替一个約束$L=0$。可以在系統上施加若干个約束$L_1=0$，$\cdots$，$L_{h-1}=0$，仿照在一个約束的特殊情况下所作的那样，可以证明

$$\omega_h^2=\max\min_{\substack{L_1=0\\ \cdots\\ L_{h-1}=0}}\frac{C(q,q)}{A(q,q)}\quad(h=2,\cdots,n). \tag{11}$$

公式(7)和(11)表示出保守系統頻率的极端性质。这些性质有时被称为最大最小性质。

代替公式(7)和(11)不难得出类似的公式：

$$\omega_n^2=\max\frac{C(q,q)}{A(q,q)}, \tag{7'}$$

$$\omega_{n-h}^2=\min\max_{\substack{L_1=0\\ \cdots\\ L_h=0}}\frac{C(q,q)}{A(q,q)}\quad(h=1,\cdots,n-1). \tag{11'}$$

由等式(7′)和(11′)所表示的主頻率极端性质有时称为最小最大性质①。

除了給定的系統而外，我們再考察另一个保守系統，它的动能和势能分别为

---

① 頻率的极端性质是德国数学家 E. 賀舍尔 (Monatshefte für Math. und Phys., 16 (1905), 234—249)和 P. 庫兰特 (Zeitschrift für angew. Math. und Mech., 2 (1922), 278—285)建立的。

$$\frac{1}{2}\widetilde{A}(\dot{q},\dot{q})=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\tilde{a}_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k,\quad \frac{1}{2}\widetilde{C}(q,q)=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\tilde{c}_{ik}q_iq_k,\tag{12}$$

主频率为

$$\tilde{\omega}_1\leqslant\tilde{\omega}_2\leqslant\cdots\leqslant\tilde{\omega}_n.\tag{13}$$

对此系統，有

$$\tilde{\omega}_1^2=\min\frac{\widetilde{C}(q,q)}{\widetilde{A}(q,q)},\tag{14}$$

$$\tilde{\omega}_h^2=\max\min_{\substack{L_1=0\\ \cdots\\ L_{h-1}=0}}\frac{\widetilde{C}(q,q)}{\widetilde{A}(q,q)}\quad(h=2,\cdots,n).\tag{15}$$

假設新系統和原系統相比慣性相同，剛性較大，即对于任何q，有

$$\widetilde{A}(q,q)=A(q,q),\quad \widetilde{C}(q,q)\geqslant C(q,q),$$

或者是：慣性較小剛性相同，即

$$\widetilde{A}(q,q)\leqslant A(q,q),\quad \widetilde{C}(q,q)=C(q,q).$$

在两种情况下，对于任何 $q\neq0$，都有：

$$\frac{C(q,q)}{A(q,q)}\leqslant\frac{\widetilde{C}(q,q)}{\widetilde{A}(q,q)}.\tag{16}$$

因而这两个比式的最小值和最大最小值也以同样的不等式相联系，即根据公式(7)，(11)，(14)和(15)，由不等式(16)便可断定

$$\omega_j\leqslant\tilde{\omega}_j\quad(j=1,\cdots,n).\tag{17}$$

同时，只要恒等式

$$\frac{C(q,q)}{A(q,q)}=\frac{\widetilde{C}(q,q)}{\widetilde{A}(q,q)}\tag{18}$$

不被满足，关系式(17)至少有一个<号成立①。

于是，得瑞利定理②如下：

① 事实上，按公式(5)，在$\omega_j=\tilde{\omega}_j(j=1,\cdots,n)$的情况下，恒等式(18)成立。

② 这个定理是英国物理学家瑞利于1873年建立的（Релей Дж. В., Теория звука, М., 1955, т. I, § 88)。

当增强系統的剛性或减弱系統的慣性时，主頻率增高①。

我們来看約束的施加对保守系統主頻率的值 $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots \leqslant \leqslant \omega_n$ 有什么影响。

設在系統上有 s 个独立的綫性約束作用着:

$$\widehat{L_1}=0, \widehat{L_2}=0, \cdots, \widehat{L_s}=0.$$

假設如此所得到的 $n-s$ 个自由度的保守系統的主頻率为 $\omega_1^* \leqslant \omega_2^* \leqslant \cdots \leqslant \omega_{n-s}^*$。在此，

$$\omega_1^{*2} = \min_{\substack{\widehat{L}_1=0 \\ \cdots\cdots \\ \widehat{L}_s=0}} \frac{C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})}. \tag{19}$$

将公式(19)与公式(7)和(11)(此时 $h-1=s$)加以比較，我們便得到:

$$\omega_1 \leqslant \omega_1^* \leqslant \omega_{s+1}. \tag{20}$$

对于任意的 $h \leqslant n-s$，則有

$$\omega_h^{*2} = \max \min_{\substack{\widehat{L}_1=0, \cdots\cdots, \widehat{L}_s=0; \\ L_1=0, \cdots\cdots, L_{h-1}=0}} \frac{C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})}. \tag{21}$$

这里，約束 $\widehat{L_1}=0, \cdots, \widehat{L_s}=0$ 是固定的，而約束 $L_1=0, \cdots, L_{h-1}=0$ 則是可变更的。将等式(21)和等式(11)以及公式

$$\omega_{h+s}^2 = \max \min_{\substack{L_1=0 \\ \cdots\cdots \\ L_{h+s-1}=0}} \frac{C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})}{A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})}$$

(其中 $s+h-1$ 个約束全都是可以变更的)加以比較，便得到

$$\omega_h \leqslant \omega_h^* \leqslant \omega_{h+s} \quad (h=1, \cdots, n-s). \tag{22}$$

(22)式表明，当施加 s 个独立約束时，前 $n-s$ 个主頻率每个

---

① 主頻率的增大程度，在增强剛度的情况下可以按 $\widetilde{C}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ 与 $C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ 之差来估計，在减弱慣性的情况下可按 $\widetilde{A}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ 与 $A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ 之差来估計(見 Гантмахер Ф.Р. и Крейн М.Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2, 1950, 3 章, § 10)。

都要增大(严格地說是：每个都不低于原来频率中序号相同的那一个——譯者)，但不超过原来主频率中序号比它大 s 的那一个。

1. 作为上述論断的一个应用，我們来证明長期方程 $\Delta(\lambda)\equiv\det(c_{ik}-\lambda a_{ik})_{i,k=1}^{n}=0$ 的根 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 和方程

$$\Delta_1(\lambda)\equiv det(c_{ik}-\lambda a_{ik})_{i,k=1}^{n-1}=0①$$

的根 $\lambda_1^*\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-1}^*$ 依次相間，即

$$\lambda_1\leqslant\lambda_1^*\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_2^*\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-1}^*\leqslant\lambda_n. \tag{23}$$

事实上，方程 $\Delta_1(\lambda)=0$ 是对原系統施以 $q_n=0$ 的約束之后而得到的保守系統的長期方程。因之，当令 $\lambda_k=\omega_k^2(k=1,\cdots,n)$，$\lambda_j^*=\omega_j^{*2}(j=1,\cdots,n-1)$ 时，立即可由不等式(22)(此时 $s=1$)得不等式(23)。

2. 我們再指出一个非常有趣的事实，来說明約束的施加使频率改变的这个論断。大家知道，用手指敲击玻璃杯，就能确定它有无裂縫。这是因为沒有裂縫的杯子的质点，比有裂縫的杯子的质点受有更多約束之故。因之，无裂縫杯子的振动频率应当較高。

§ 44. 彈性系統的微振动

作为保守系統微振动的一个重要例子，我們来考察 n 个质量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，它們分别被集中在彈性系統 S（弦，杆，膜，板等）的 n 个点(1)，(2)，…，(n)上，系統 S 的大小是有限的，以任意方式固定在边界上。

設系統 S 的(1)，(2)，…，(n)点的位移(撓度)各为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，作用在质量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 上的力各为 $F_1, F_2, \cdots, F_n$，它們相互平行，因而可用代数量来确定(图 50)。撓度 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 可以看作系統的独立坐标，諸力 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 则可看作与之对应的广义力，因为这些力的元功等于

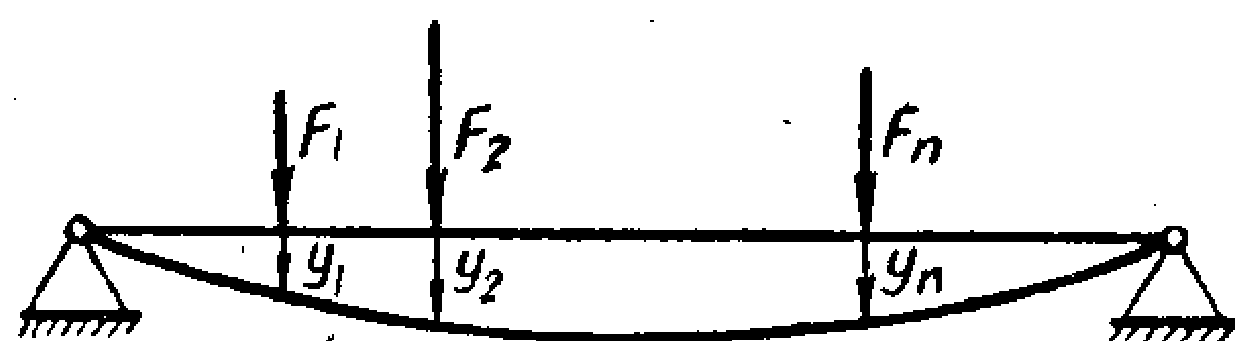


图 50.

$$\sum_{i=1}^{n}F_i dy_i.$$

当研究自由振动时，我們取由于撓度 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的存在而引起来自彈性系統 S 方面的、作用在质量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 上的彈性力 $F_1^*, F_2^*, \cdots, F_n^*$ 作为力

① $\Delta_1(\lambda)$ 是行列式 $\Delta(\lambda)$ 的第 $n-1$ 阶主子式。有时也說，不等式(23)表达了長期方程根的"分隔定理"。不等式(23)可用来求長期方程根的上下界。(見，例如，Бабаков И. М., Теория колебаний, Гостехиздат, 1958, 第 106—107 頁。)

$F_1, F_2, \cdots, F_n$。这个在彈性力作用下的 n 个质点的系統是保守的，而且有一定的势能 $\Pi(y_1, y_2, \cdots, y_n)$。将函数 $\Pi(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 展成冪級数，并在展开式中只保留平方項（見 § 40），則得 Π 的表达式如下：

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}y_i y_k \ (c_{ik}=c_{ki};\ i,k=1,\cdots,n). \tag{1}$$

于是，关于彈性力 $F_i^*=-\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}(i=1,\cdots,n)$，便有

$$F_i^*=-\sum_{k=1}^{n} c_{ik}y_k \ (i=1,\cdots,n). \tag{2}$$

設平衡位置 $y_1=\cdots=y_n=0$ 是稳定的，則表势能为撓度的函数的二次型(1)是正定的：

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}y_i y_k>0 \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2>0\right). \tag{3}$$

系統的动能有如下的簡单形式：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i^2. \tag{4}$$

当求諧振动 $y_i=u_i\sin(\omega t+\alpha)$ 时（一如在 § 40 中所作的那样），我們便得到頻率方程

$$\begin{vmatrix} c_{11}-m_1\lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-m_2\lambda & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-m_n\lambda \end{vmatrix}=0 \quad (\lambda=\omega^2) \tag{5}$$

和一組确定振幅的代数方程

$$\sum_{k=1}^{n}(c_{ik}-\lambda m_i\delta_{ik})u_k=0 \ \ (i=1,\cdots,n). \tag{6}$$

系統有 n 个頻率

$$\omega_1\leqslant\omega_2\leqslant\cdots\leqslant\omega_n \tag{7}$$

和对应的振幅矢量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$；自由振动可由公式

$$\boldsymbol{y}=\sum_{j=1}^{n} C_j\boldsymbol{u}_j\sin(\omega_j t+\alpha_j) \tag{8}$$

来确定，其中 C_j 和 $\alpha_j(j=1,\cdots,n)$ 是任意常数，由初始条件决定。

設外力 $F_1, \cdots, F_n$ 所引起的静撓度为 $y_1, \cdots, y_n$。于是，力 F_i 和彈性力 F_i^* 相互平衡(即 $F_i=-F_i^*$; $i=1, \cdots, n$)，因之，按等式(2)，便有：

$$F_i=\sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k \quad (i=1, \cdots, n). \tag{9}$$

在研究彈性系統时，矩陣 $\boldsymbol{C}=\| c_{ik} \|_1^n$① 的逆矩陣 $\boldsymbol{G}=\| g_{ik} \|_1^n$，即

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{C}^{-1}$$

起着重要作用。

利用矩陣 $\boldsymbol{G}$ 可将撓度 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 从方程(9)解出，写成如下形式：

$$y_i=\sum_{k=1}^{n} g_{ik} F_k \quad (i=1, \cdots, n). \tag{10}$$

量 g_{ik} 等于作用在(k)点的单位外力在(i)点引起的撓度，叫做(k)点对(i)点的影响系数$(i, k=1, \cdots, n)$。由矩陣 $\boldsymbol{C}$ 的对称性可知，由影响系数构成的矩陣 $\boldsymbol{G}$ 是对称的，即②

$$g_{ik}=g_{ki} \quad (i, k=1, \cdots, n). \tag{11}$$

另外，由型(3)的正定性可以断定，二次型 $G(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F})$ 是正定的，即

$$G(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F})=\sum_{i, k=1}^{n} g_{ik} F_i F_k>0\left(\sum_{i=1}^{n} F_i^2>0\right), \tag{12}$$

因为在变换(10)之下，二次型 $\sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k$ 轉換为二次型(12)：

$$\Pi=\frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} y_i y_k=\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i y_i=\frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} g_{ik} F_i F_k. \tag{13}$$

我們来看綫性彈性系統 S，即具有普通固定端的弦或杆。可以证明，在这种情况下，影响系数矩陣 $\boldsymbol{G}$ 有如下性质。

1°. 矩陣 $\boldsymbol{G}$ 的所有任意阶子式(不仅是主子式!)都是非負的：

$$\begin{vmatrix} g_{i_1k_1} & \cdots & g_{i_1k_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{i_pk_1} & \cdots & g_{i_pk_p} \end{vmatrix} \geqslant 0$$

---

① 矩陣 $\boldsymbol{C}$ 是非奇异的(即 $\det \boldsymbol{C} \neq 0$)，因为二次型(3)是正定的。

② 等式(11)表示出所謂的馬克斯威尔互易性原理："作用在(k)点的单位力在(i)点所引起的撓度，等于作用在(i)点的单位力在(k)点所引起的撓度"。

$(0 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant n;\ \ 0 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_p \leqslant n;\ \ p=1, \cdots, n).$

2°. 当 $|i-k| \leqslant 1$ 时, $g_{ik}>0(i, k=1, \cdots, n)$。

3°. 行列式 $\det \mathbf{G}=|g_{ik}|_1^n>0$.

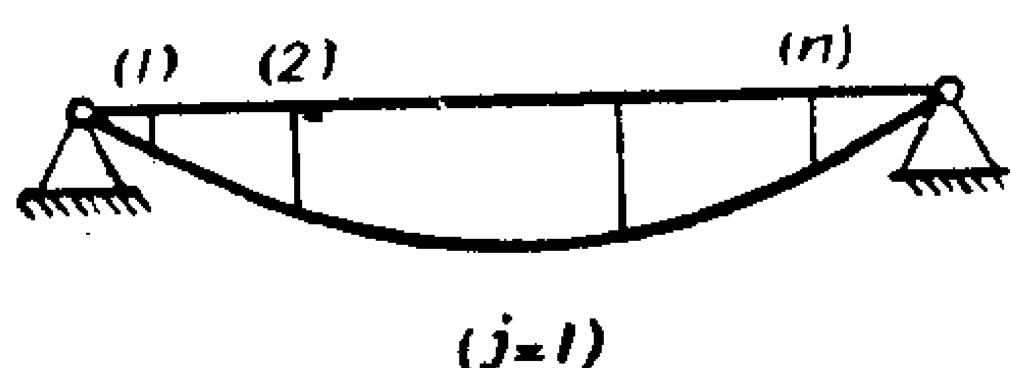
具有性质 1°, 2°, 3° 的矩陣叫做顫动矩陣。

应当注意, 任何正定矩陣 $\mathbf{G}$ 都滿足性质 3°, 以及关于主子式的不等式 1° 和关于对角綫元素 $g_{ii}(i=1, \cdots, n)$的不等式 2°。但是, 任意的 p 阶非主子式的非負性① 和元素 $g_{12}, \cdots, g_{n-1, n}$ 的正性却都是綫性彈性系統影响系数矩陣的独特性质。

由影响系数矩陣的顫动性可以得出綫性系統彈性振动如下的基本"顫动"性质。

1°. 所有頻率互不相同:

$$\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n.$$



2°. 第一主振动(頻率为 ω_1) 的所有振幅 $u_{11}, u_{21}, \cdots, u_{n1}$ 都不等于零, 而且有相同的符号。

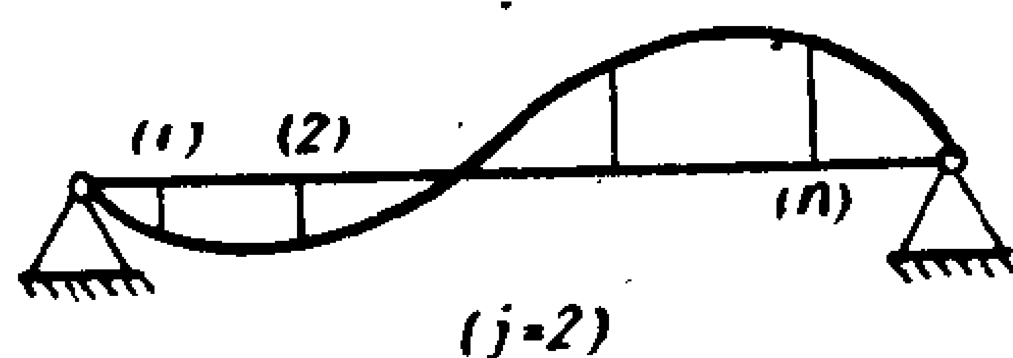


图 51.

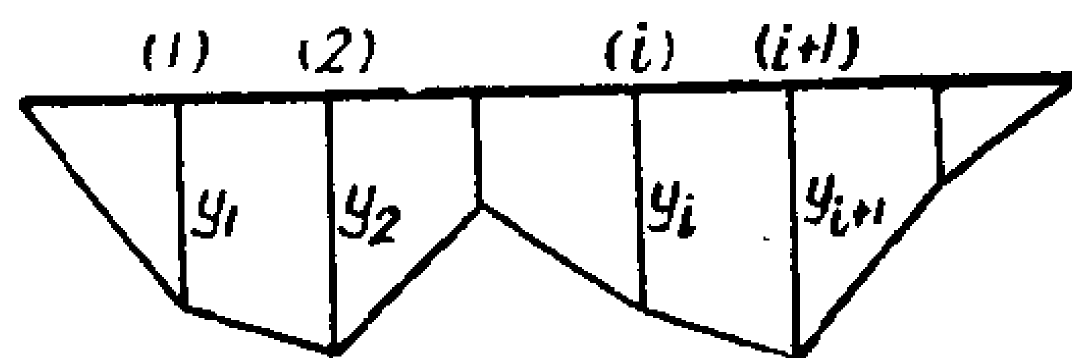


图 52.

3°. 在頻率为 ω_j 的第 j 个主振动中, 振幅 $u_{1j}, u_{2j}, \cdots, u_{nj}$ 有 $j-1$ 次变号$(j=1, \cdots, n)$(图 51)。

顫动矩陣的研究以及对彈性振动顫动性质的論证都超出了本书的討論范圍②。

例題. 我們来討論有限长弦振动的古典問題: 弦长为 l, 两端固定, 弦的全部质量集中在二端点間的 n 个等距离点上, 且集中质量彼此相等, 都等于 m(图 52)。

---

① 包括矩陣 $\mathbf{G}$ 非对角綫元素的非負性(即当 $i \neq k$ 时 $g_{ik} \geqslant 0$ 的性质)。

② 关于这部分材料讀者可以在下面的书中找到: Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2, М., 1950。

第 i 段弦(即撓度为 y_i 和 y_{i+1} 的两点間的那一段)的伸长(精确到四阶小量)可以表示如下:

$$\sqrt{\left(\frac{l}{n+1}\right)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}-\frac{l}{n+1}=$$

$$=\frac{l}{n+1}\left(\sqrt{1+\left(\frac{n+1}{l}\right)^2(y_{i+1}-y_i)^2}-1\right)\approx\frac{n+1}{2l}(y_{i+1}-y_i)^2.$$

設弦中張力 σ 不变①,則得勢能表达式

$$\Pi=\frac{c}{2}\sum_{i=0}^{n}(y_{i+1}-y_i)^2\left(y_0=y_{n+1}=0;\ c=\frac{\sigma(n+1)}{l}\right). \tag{14}$$

动能有簡单形式:

$$T=\frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{y}_i^2. \tag{15}$$

我們用間接的方法② 来求主频率和与之对应的振幅矢量。利用 Π 和 T 的表达式(14)和(15)列出求振幅的方程組(6)。以 c 除这方程組的每个方程,同时,为簡单計,我們令

$$1-\frac{m}{2c}\omega^2=\cos\theta, \tag{16}$$

式中 θ 为一輔助量。于是,振幅方程(6)取如下形式:

$$u_{k-1}-2u_k\cos\theta+u_{k+1}=0\quad(k=1,\cdots,n), \tag{17}$$

其中

$$u_0=u_{n+1}=0. \tag{18}$$

若令

$$u_k=\sin k\theta\quad(k=0,1,\cdots,n+1), \tag{19}$$

則代数方程(6)将得以滿足③。这里,"边界"条件(18)的头一个将自动滿足,而第二个则給出确定未知频率的条件:

$$\sin(n+1)\theta=0. \tag{20}$$

由此即得 $\theta_j=\frac{j\pi}{n+1}(j=1,\cdots,n)$,因而,按照等式(16)便有:

---

① 仅当討論小撓度 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 时,这个假定才是正确的。

② 見 Крейн М. Г., Математический сборник, т. 40, 1933, стр. 455—466。

③ 当以表达式(19)代入方程(17)时,便得到下列三角恒等式:

$$\sin(k-1)\theta-2\sin k\theta\cos\theta+\sin(k+1)\theta=0\ (k=0,1,\cdots,n).$$

$$\omega_j^2=\frac{2c}{m}(1-\cos\theta_j),$$

即

$$\left.\begin{aligned}\omega_j=2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\frac{\theta_j}{2}=2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\frac{j\pi}{2(n+1)}\\ \left(j=1,\ \cdots,\ n;\ \ c=\frac{(n+1)\sigma}{l}\right).\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

在等式(19)中令 $\theta=\theta_j$，即得第 j 个主振动的振幅 $u_{1j}, u_{2j}, \cdots, u_{nj}$:

$$u_{kj}=\sin k\theta_j=\sin\frac{kj\pi}{n+1}\quad(k,\ j=1,\cdots,n).\tag{22}$$

系統的任何自由振动可由下式决定:

$$\begin{aligned}y_k&=\sum_{j=1}^{n}C_ju_{kj}\sin(\omega_jt+\alpha_j)=\\&=\sum_{j=1}^{n}C_j\sin\frac{kj\pi}{n+1}\sin\left(2\sin\frac{j\pi}{2(n+1)}\cdot\sqrt{\frac{c}{m}}t+\alpha_j\right).\end{aligned}\tag{23}$$

由公式(21)和(22)立即可以見出，所得主振动具有顫动性质 1°—3°。

拉格朗日曾經指出怎样由所得之公式借极限过渡的方法可以得到均匀弦(有固定端)的自由振动，此时弦的质量不再集中在 n 个点上，而是以密度 ρ 沿弦均匀分布。

在所討論的問題中，設 $m=\frac{\rho l}{n}$，則对于均匀弦主頻率得不連續类比公式:

$$\omega_j^{(n)}=\frac{2}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}n(n+1)}\sin\frac{j\pi}{2(n+1)}\quad(j=1,\cdots,n).\tag{24}$$

在 $n\to\infty$ 的极限情况下，便得到关于两端固定的均匀弦的頻率 ω_j 的著名公式:

$$\omega_j=j\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\quad(j=1,2,\cdots).\tag{25}$$

这公式表述出麦尔心定律，按此定律，所有頻率都是基音頻率 $\omega_1=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ 的整数倍，而且各頻率都和張力的平方根成正比，和弦长及密度平方根成反比。

現將均匀弦的第 j 个諧振动写成

$$y_j(x,\ t)=u_j(x)\sin(\omega_jt+\alpha_j)\quad(0\leqslant x\leqslant l)\tag{26}$$

的形式，其中 $u_j(x)$ 是在此振动中撓度的振幅。

將撓度振幅 $u_j(x)$ 看作当 $n\to\infty$, $\frac{kl}{n+1}\to x$ 时量(22)的极限:

$$u_j(x)=\lim u_{kj},$$

則由公式(22)便得到：

$$u_j(x)=\sin\frac{j\pi x}{l}\quad (j=1,2,\cdots).$$

于是，将主振动(26)作綫性叠加而得到的均匀弦自由振动可由如下公式表示：

$$y(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}C_j\sin\frac{j\pi x}{l}\sin(\omega_j t+\alpha_j),$$

其中 C_j 和 α_j $(j=1,2,\cdots)$都是任意常数。

§45. 在不显含时間的力的作用下，平稳系統的微振动

当广义力 Q_i 仅与坐标和速度有关时，平稳系統的拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i(q_k,\dot{q}_k)\quad (i=1,\cdots,n).\tag{1}$$

假設坐标原点是平衡位置。于是，精确到关于q_i和$\dot{q}_i(i=1,\cdots,n)$为二阶小量的动能表达式可以写成常系数二次型(見 §40)

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k,\tag{2}$$

其中 $a_{ik}=a_{ki}$ $(i,k=1,\cdots,n)$。

现在将广义力 $Q_i(q_k,\dot{q}_k)$按 q_k 和 $\dot{q}_k$ 展成幂級数：

$$Q_i=Q_{i0}+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)_0 q_k+\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k}\right)_0 \dot{q}_k\right]+(**).\tag{3}$$

因为坐标原点是平衡位置，故当坐标和速度同为零时，所有广义力应当等于零，即

$$Q_{i0}=0\quad (i=1,\cdots,n).\tag{4}$$

令

$$b_{ik}=-\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k}\right)_0,\quad c_{ik}=-\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)_0\quad (i,k=1,\cdots,n),\tag{5}$$

則当略去(3)式中所有二阶及更高阶小量的各項之后，便有

$$Q_i=-\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}\dot{q}_k+c_{ik}q_k) \quad (i=1,\cdots,n). \tag{6}$$

将动能和广义力的表达式(2)和(6)代入拉格朗日方程(1)，则得平稳系統微振动的綫性运动微分方程組

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k+b_{ik}\dot{q}_k+c_{ik}q_k)=0 \quad (i=1,\cdots,n). \tag{7}$$

若以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别表示方陣 $\|a_{ik}\|_1^n$, $\|b_{ik}\|_1^n$, $\|c_{ik}\|_1^n$①, $\boldsymbol{q}$ 表示分量为 $q_1,\cdots,q_n$ 的矢量列，則微分方程組(7)可以写成如下的矩陣形式:

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}=0. \tag{8}$$

我們来找方程組(8)如下形式的解:

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}e^{\mu t}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是常元素 $u_1,\cdots,u_n$ 的矢量列，μ 是一个数。

将表达式(9)代入矩陣方程(8)，約去 $e^{\mu t}$ 之后，得:

$$(\boldsymbol{A}\mu^2+\boldsymbol{B}\mu+\boldsymbol{C})\boldsymbol{u}=0, \tag{10}$$

或写成展开形式:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\mu^2+b_{ik}\mu+c_{ik})u_k=0 \quad (i=1,\cdots,n). \tag{10'}$$

为使方程組(10)或(10′)有非零解 $\boldsymbol{u}$，必須且只須此方程組的系数行列式为零，即

$$\Delta(\mu)\equiv\det(\boldsymbol{A}\mu^2+\boldsymbol{B}\mu+\boldsymbol{C})=0, \tag{11}$$

或展开之，写成

$$\Delta(\mu)\equiv\begin{vmatrix} a_{11}\mu^2+b_{11}\mu+c_{11}\cdots a_{1n}\mu^2+b_{1n}\mu+c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\mu^2+b_{n1}\mu+c_{n1}\cdots a_{nn}\mu^2+b_{nn}\mu+c_{nn} \end{vmatrix}=0. \tag{11'}$$

① 注意，$\boldsymbol{A}$ 是正定对称矩陣(这个性质在此沒有用到)。

方程(11)叫做已知系統的长期方程。这个代数方程关于μ是$2n$阶的。

我們仅限于討論长期方程的所有根$\mu_1, \cdots, \mu_{2n}$彼此互异的这一基本情况。对于每个根μ_h，都有齐次代数方程組(10)的某个非零解$\boldsymbol{u}_h \equiv (u_{1h}, \cdots, u_{nh})$与之对应，因而也就有微分方程組(8)的特解$\boldsymbol{u}_h e^{\mu_h t}$与之对应$(h=1, \cdots, 2n)$。此微分方程組的通解，可由这些特解的具有任意常系数的綫性組合而得到.

$$\boldsymbol{q} = \sum_{h=1}^{2n} C_h \boldsymbol{u}_h e^{\mu_h t}. \qquad (12)$$

特別重要的是，全体根μ_h的实数部分都是負数的这一情况:

$$\mathrm{Re}\,\mu_h < 0 \quad (h=1, \cdots, 2n).$$

此时，系統的平衡位置不仅对于綫性化了的方程組(8)是漸近稳定的，而且对于原来以微分方程組(1)所描述的非綫性平稳系統也是漸近稳定的(見 § 38)。

最后我們指出，对于保守系統，$\boldsymbol{B} = \|b_{ik}\|_1^n = 0$，而$\boldsymbol{A} = \|a_{ik}\|_1^n$和$\boldsymbol{C} = \|c_{ik}\|_1^n$都是对称的正定矩陣。若令$\mu = i\sqrt{\lambda}$ $(i=\sqrt{-1})$，則长期方程$\det(\boldsymbol{A}\mu^2 + \boldsymbol{C}) = 0$便化为 § 40 中的方程$\det(\boldsymbol{C} - \lambda \boldsymbol{A}) = 0$。但是，正如在 § 40 中所指出的，方程$\det(\boldsymbol{C} - \lambda\boldsymbol{A}) = 0$只有正实根。因此，在保守系統的情况下，方程(11)只有純虛根。

§ 46. 瑞利耗散函数 · 小耗散力对保守系統振动的影响

我們来看这样一个重要的特殊情况：无需使用 § 39 所表述的稳定性准則，就可以預先断定平衡位置的漸近稳定性。

假設在广义力的表达式[見第 225 頁等式(6)]

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k - \sum_{k=1}^{n} c_{ik} q_k \quad (i=1, \cdots, n) \qquad (1)$$

中，系数矩陣 $\boldsymbol{B}=\|b_{ik}\|_1^n$ 和 $\boldsymbol{C}=\|c_{ik}\|_1^n$ 都是对称正定矩陣。

于是，若在討論中引入势能 Π 和瑞利耗散 R(見 §8)：

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}q_iq_k>0,\quad R=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k>0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}q_i^2>0,\ \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2>0\right), \tag{2}$$

則公式(1)便可写成

$$Q_i=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}-\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_i}\quad(i=1,\cdots,n). \tag{3}$$

系統上除有势力 $-\dfrac{\partial\Pi}{\partial q_i}(i=1,\cdots,n)$ 而外，还作用有由瑞利函数决定的耗散力 $-\dfrac{\partial R}{\partial\dot{q}_i}$。前已查明(見 §8)，在这种情况下，系統是定耗散的。又因为按照(2)中第一个公式，势能在平衡位置有严格极小值，故平衡位置是漸近稳定的(見第 172 頁上的定理)。

因此，由瑞利函数所决定的耗散力，不仅不破坏保守系統平衡位置的稳定性，而且还使此位置成为漸近稳定的。

在所討論的情况下，可以給出一个簡单公式来估計长期方程的根。我們仍然来找形如 $\boldsymbol{u}e^{\mu t}$ 的解。为了决定矢量列 $\boldsymbol{u}$，我們有方程(見第 225 頁)

$$(\boldsymbol{A}\mu^2+\boldsymbol{B}\mu+\boldsymbol{C})\boldsymbol{u}=0, \tag{4}$$

或写成展开形式：

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\mu^2+b_{ik}\mu+c_{ik})u_k=0\quad(i=1,\cdots,n). \tag{4'}$$

将(4′)式第 i 个方程的两端各乘以 $\bar{u}_i$($\bar{u}_i$ 是 u_i 的共軛复数)，并对 i 求和，則得：

$$\mu^2\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\bar{u}_iu_k+\mu\sum_{i,k=1}^{n}b_{ik}\bar{u}_iu_k+\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}\bar{u}_iu_k=0,$$

或简写成

$$A(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})\mu^2+B(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})\mu+C(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})=0, \tag{5}$$

其中$A(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}))>0, B(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})>0, C(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})>0$[1].

因此，长期方程的任何根μ都满足具有正系数的二次方程(5)。由此立即可得 $\mathrm{Re}\mu<0$。

若长期方程有复根 $\mu=\gamma+i\delta$，则此同一方程也必有共軛复根 $\bar{\mu}=\gamma-i\delta$。数μ和$\bar{\mu}$都是二次方程(5)的根。因此，若令$\boldsymbol{u}==\boldsymbol{v}+i\boldsymbol{w}, \bar{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{v}-i\boldsymbol{w}$($\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{w}$都是实矢量列)，则有[2]:

$$\left.\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\mu=\mu+\bar{\mu}=-\frac{B(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})}{A(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})}=-\frac{B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})+B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})}{A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})+A(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})}<0,\\ |\mu|^2=\mu\bar{\mu}=\frac{C(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})}{A(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}})}=\frac{C(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})+C(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})}{A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})+A(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

与共軛复根μ和$\bar{\mu}$相对应的是复共軛振动$\boldsymbol{u}e^{\mu t}$和$\bar{\boldsymbol{u}}e^{\bar{\mu}t}$。在$\boldsymbol{q}$的表达式[見第 226 頁上的公式(12)]中，当任意常系数取复共軛值$C=\frac{1}{2}(F+iG)$和$\bar{C}=\frac{1}{2}(F-iG)$时，对应项之和可化为实数形式:

$$\begin{aligned} C\boldsymbol{u}e^{\mu t}+\bar{C}\bar{\boldsymbol{u}}e^{\bar{\mu}t}&=\frac{1}{2}(F+iG)(\boldsymbol{v}+i\boldsymbol{w})e^{(\gamma+i\delta)t}+\\ &+\frac{1}{2}(F-iG)(\boldsymbol{v}-i\boldsymbol{w})e^{(\gamma-i\delta)t}=\\ =\mathrm{Re}\{[F\boldsymbol{v}-G\boldsymbol{w}+i(F\boldsymbol{w}+G\boldsymbol{v})]&e^{\gamma t}(\cos\delta t+i\sin\delta t)\}=\\ =e^{\gamma t}[(F\boldsymbol{v}-G\boldsymbol{w})\cos\delta t&-(F\boldsymbol{w}+G\boldsymbol{v})\sin\delta t]. \end{aligned} \tag{7}$$

若有两个实根μ和μ'，我們将对应的矢量列記作$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{u}'$，则当以u'_i(代替$\bar{u}_i$)乘(4′)式第i个方程时，代替等式(5)便得到如下等式:

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')\mu^2+B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')\mu+C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')=0. \tag{8}$$

---

[1] 見第 202 頁上的 5°。

[2] 見第 201 頁上的公式(20)。

将矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$ 的地位調换一下便可以見出数 μ' 也满足方程(8)。因此，

$$\mu+\mu'=-\frac{B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')}{A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')},\quad \mu\mu'=\frac{C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')}{A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')}. \tag{9}$$

我們現在来看，在**小耗散力**作用下，保守系統的主振动将发生怎样的变化①。引入簡正坐标 $\theta_1,\cdots,\theta_n$。在这些坐标之下，

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{\theta}_i^2,\quad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\theta_i^2, \tag{10}$$

$$R=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\dot{\theta}_i^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1\\(i\neq k)}}^{n}\beta_{ik}\dot{\theta}_i\dot{\theta}_k, \tag{11}$$

其中 $\omega_i(i=1,\cdots,n)$ 是保守系統的主频率，瑞利函数表达式(11)中的系数 β_i，$\beta_{ik}(i,k=1,\cdots,n;$ 当 $i\neq k$ 时 $\beta_{ik}=\beta_{ki})$ 均为小量(这些量的平方項和乘积項可以略去)。由二次型(11)的正定性可知 $\beta_i>0$ $(i=1,\cdots,n)$。

拉格朗日方程为

$$\ddot{\theta}_i+\beta_i\dot{\theta}_i+\omega_i^2\,\theta_i+\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n}\beta_{ik}\dot{\theta}_k=0\quad(i=1,\cdots,n). \tag{12}$$

由此代入

$$\theta_i=x_ie^{\mu t}\ \ (i=1,\cdots,n), \tag{13}$$

并約去 $e^{\mu t}$，則得綫性方程組

$$(\mu^2+\beta_i\mu+\omega_i^2)\kappa_i+\mu\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n}\beta_{ik}\kappa_k=0\quad(i=1,\cdots,n). \tag{14}$$

令此組的系数行列式为零，得长期方程

$$\begin{vmatrix}\mu^2+\beta_1\mu+\omega_1^2 & \beta_{12}\mu & \cdots & \beta_{1n}\mu\\ \beta_{21}\mu & \mu^2+\beta_2\mu+\omega_2^2 & \cdots & \beta_{2n}\mu\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{n1}\mu & \beta_{n2}\mu & \cdots & \mu^2+\beta_n\mu+\omega_n^2\end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

将此行列式展开，并略去那些包含小系数 β_i,β_{ik} 的乘积項，則长期方程

① 見 Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, М.—Л., 1937, §94。(有英文本)

便可写成如下形式:

$$\prod_{k=1}^{n}(\mu^2+\beta_k\mu+\omega_k^2)=0. \tag{16}$$

作为第一近似,长期方程的根有如下形式:

$$\mu_k\approx-\frac{\beta_k}{2}\pm i\omega_k\ \ (k=1,\cdots,n). \tag{17}$$

現在来求对应于 $\mu=\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1$ 的振幅 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$。将 μ 的这个值代入(14)式后 $n-1$ 个方程的系数中,并以 μ_1 除这些方程的左端,便得到:

$$\left.\begin{aligned}&\beta_{21}\kappa_1+\left(\beta_2-\beta_1+\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{i\omega_1}\right)\kappa_2+\cdots+\beta_{2n}\kappa_n=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\beta_{n1}\kappa_1+\beta_{n2}\kappa_2+\cdots+\left(\beta_n-\beta_1+\frac{\omega_n^2-\omega_1^2}{i\omega_1}\right)\kappa_n=0.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

略去二阶及更高阶小量(关于 β_i,β_{ik})之后,由这組方程得比値 $\frac{\kappa_k}{\kappa_1}(k=2,\cdots,n)$ 如下:

$$\frac{\kappa_k}{\kappa_1}=i\varepsilon_k,\quad \varepsilon_k=-\frac{\beta_{k1}\omega_1}{\omega_k^2-\omega_1^2}\ \ (k=2,\cdots,n). \tag{19}$$

公式(19)表明,ε_k 是实的小量$(k=2,\cdots,n)$。設 $\kappa_1=Ae^{i\alpha}$,其中 $A>0$,則与根 $\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1$ 相对应的"复振动"为

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1=\kappa_1e^{\mu_1t}=Ae^{-\frac{\beta_1}{2}t}e^{i(\omega_1t+\alpha)},\\&\theta_k=\varepsilon_kAe^{-\frac{\beta_1}{2}t}e^{i\left(\omega_1t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}\ \ (k=2,\cdots,n).\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

取上述振动及其复共軛振动的綫性組合,則得与根 $\mu_1=-\frac{\beta_1}{2}+i\omega_1$ 和 $\bar{\mu}_1=-\frac{\beta_1}{2}-i\omega_1$ 相对应的"主振动"

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1=Ae^{-\frac{\beta_1}{2}t}\sin(\omega_1t+\alpha),\\&\theta_k=\varepsilon_kAe^{-\frac{\beta_1}{2}t}\sin\left(\omega_1t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)(k=2,\cdots,n).\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

至于其它的主振动,也可以得到类似的表达式。

因此,在第一近似中:1)小耗散力不改变保守系統的频率;2)在这些小力作用下,当 $t\to\infty$ 时,振动将消失;3)在第 j 个主振动中,除第 j 个坐标而外,所有其它坐标和第 j 个坐标相比均为小量,而且在相位上相差四分之一

周期($j=1, \cdots, n$)。

§47. 与时間有关的外力对平稳系統微振动的影响·幅-相特性

假設在平稳系統上，除了§45中所說的那些力而外，还作用有力 $Q_i(t)(i=1,\cdots,n)$。此时，系統微振动的拉格朗日方程和第225頁上方程(7)的差别仅在于右端有非零項存在:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k+b_{ik}\dot{q}_k+c_{ik}q_k)=Q_i(t)\quad(i=1,\cdots,n). \tag{1}$$

这个非齐次微分方程組的通解可以写成

$$\boldsymbol{q}=\sum_{h=1}^{2n}C_h\boldsymbol{u}_h e^{\mu_h t}+\boldsymbol{q}^* \tag{2}$$

的形式，其中第一个和式乃是对应齐次方程組的通解，$\boldsymbol{q}^*$ 是組(1)的某一特解。

假設系統的位置 $q_1=\cdots=q_n=0$ 是漸近稳定的平衡位置，即 $\mathrm{Re}\mu_h<0(h=1,\cdots,2n)$。于是，当 $t\to\infty$时，第一个和式趋于零①，因而在足够长的时間 t 之后，非齐次方程組的通解 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{q}^*$ 实际上是一样的。因此，我們今后将仅对"强迫振动"$\boldsymbol{q}^*$感到兴趣，而且就簡单地把它写作 $\boldsymbol{q}$。

由于微分方程組(1)是綫性的，故(按綫性叠加原理)找一般情况的强迫振动可归結为只有一个非零广义力 $Q_i(t)$的情况。

譬如，設 $Q_1(t)\neq0$，而 $Q_j(t)=0(j=2,\cdots,n)$。此外，先假設 $Q_1(t)$是諧和力，即

$$Q_1(t)=Ae^{i\Omega t}. \tag{3}$$

① 若长期方程有重根，則在等式(2)右端的和式中将会出現形式为

$$C_h(\boldsymbol{u}_h+\boldsymbol{u}'_h t+\boldsymbol{u}''_h t^2+\cdots)e^{\mu_h t}$$

的长期項。但在这种情况，只要所有的 $\mathrm{Re}\mu_h<0$，和式也将在 $t\to\infty$ 时趋于零。

于是微分方程(1)可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}\ddot{q}_k+b_{1k}\dot{q}_k+c_{1k}q_k)=Ae^{i\Omega t},\\&\sum_{k=1}^{n}(a_{jk}\ddot{q}_k+b_{jk}\dot{q}_k+c_{jk}q_k)=0\ \ (j=2,\cdots,n).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

我們来找形式为

$$q_k=B_ke^{i\Omega t}\ \ (k=1,\cdots,n)\tag{5}$$

的强迫振动。将 $q_k(k=1,\cdots,n)$ 的这些表达式代入微分方程(4)，并約去 $e^{i\Omega t}$，則得确定 B_k 值的一組代数方程：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}[a_{1k}(i\Omega)^2+b_{1k}(i\Omega)+c_{1k}]B_k=A,\\&\sum_{k=1}^{n}[a_{jk}(i\Omega)^2+b_{jk}(i\Omega)+c_{jk}]B_k=0\\&\qquad\qquad(j=2,\cdots,n).\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

解这組代数方程，得：

$$B_k=W_{1k}(i\Omega)A\ \ (k=1,\cdots,n),\tag{7}$$

其中

$$W_{1k}(i\Omega)=\frac{\Delta_{1k}(i\Omega)}{\Delta(i\Omega)}\tag{8}$$

是关于 $i\Omega$ 的实系数有理眞分式函数；此函数在复平面上的端图叫做频率特性或幅-相特性，有时候也把这函数本身叫做频率特性或幅-相特性。

于是，坐标 q_k 对外界作用 $Q_1=Ae^{i\Omega t}$ 的“反应”可由这作用乘以频率特性 $W_{1k}(i\Omega)$而得到：

$$q_k=W_{1k}(i\Omega)Ae^{i\Omega t}.\tag{9}$$

令

$$W_{1k}(i\Omega)=R_{1k}(\Omega)e^{i\Psi_{1k}(\Omega)}\ \ [R_{1k}(\Omega)>0]\tag{10}$$

$[R_{1k}(\Omega)$ ——振幅特性，$\Psi_{1k}(\Omega)$——相位特性]，則公式(9)可以

改写成如下形式:

$$q_k = R_{1k}(\Omega) A e^{i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} \quad (k=1, \cdots, n). \tag{11}$$

現在設

$$Q_1 = A \sin \Omega t, \tag{12}$$

即

$$Q_1 = \frac{A}{2i}(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}),$$

則对应的反应为[①]

$$q_k = \frac{1}{2i} R_{1k}(\Omega) A \{e^{i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]} - e^{-i[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]}\},$$

即

$$q_k = R_{1k}(\Omega) A \sin[\Omega t + \Psi_{1k}(\Omega)]. \tag{13}$$

換句話說，由正弦型力(12)轉換为对应的反应——正弦型强迫振动(13)时，力的振幅被乘以振幅特性 $R_{1k}(\Omega)$，而相位的偏移决定于相位特性 $\Psi_k(\Omega)$。

图 53 上画的是幅-相特性 $W_{1k}(i\Omega)(0<\Omega<\infty)$。若对于給定的 Ω，对应的 $R_{1k}(\Omega)$ 很小，則反应振幅和具有給定頻率 Ω 的"激发" $A\sin\Omega t$ 的振幅相比較，也将非常小。反之，若在給定的 Ω 之下，对应的 $R(\Omega)$ 很大，則反应振幅比之广义力 Q_1 的振幅也将很大。因之，选擇具有适当振幅特性的系統，

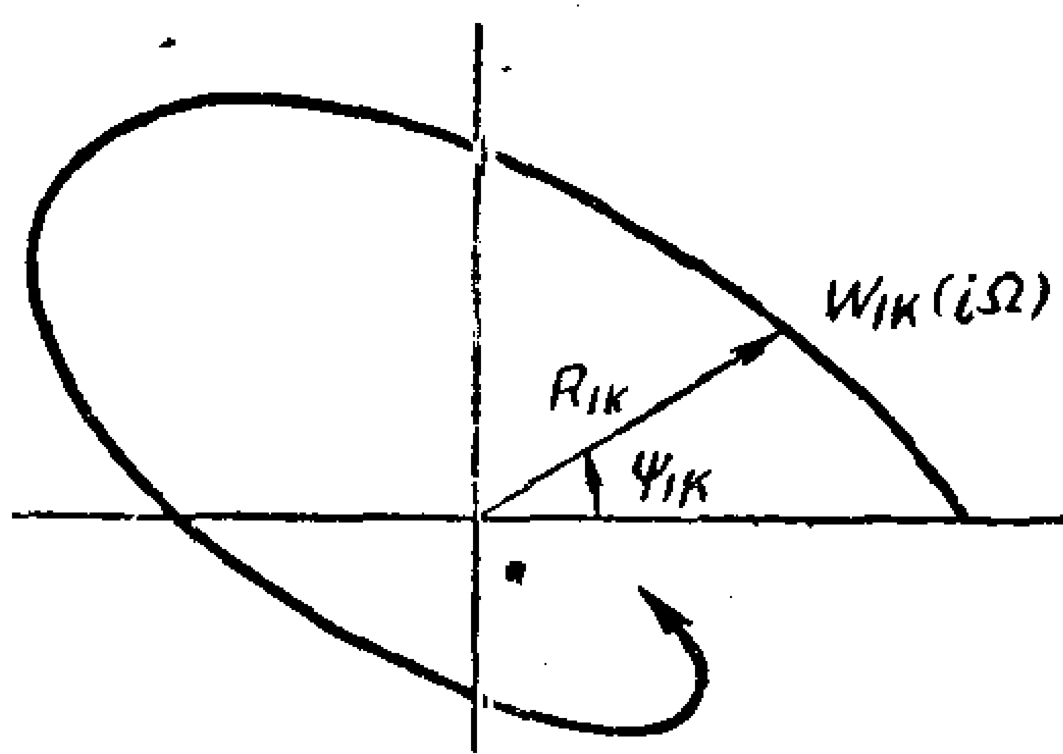


图 53.

便可以使一定頻率范圍的振动消失，使其它頻率的振动振幅增大。此即滤波器的构造原理。

由于 $W(i\Omega)$ 是有理眞分式函数，因而当 $\Omega\to\infty$ 时，$W(i\Omega)\to$

① 因为 $W_{1k}(i\Omega)$ 和 $W_{1k}(-i\Omega)$ 是共軛复数，故 $R_{1k}(-\Omega)=R_{1k}(\Omega)$，$\Psi_{1k}(-\Omega)=-\Psi_{1k}(\Omega)$。

$\to 0$, 故任何系統实际上仅能通过有限頻带。

現在假設 $Q_1(t)$ 是以富里哀級数給出的任一周期函数:

$$Q_1(t)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\sin(m\Omega t+\varphi_m). \tag{14}$$

将此級数各諧量所激发的反应相加, 便得到

$$q_k=\sum_{m=0}^{\infty}R_{1k}(m\Omega)A_m\sin[m\Omega t+\varphi_m+\Psi_{1k}(m\Omega)] \tag{15}$$

$$(k=1,\cdots,n).$$

若 $Q_1(t)$ 是关于 t 的任意非周期函数 $f(t)$。我們将它写成傅里叶积分①的形式:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\Omega t}d\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\Omega t}dt. \tag{16}$$

令

$$F(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\Omega t}dt, \tag{17}$$

則有

$$Q_1=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega. \tag{18}$$

函数 $F(\Omega)$ 叫做函数 $Q_1=f(t)$ 的复譜。

外界作用

$$\frac{1}{2\pi}F(\Omega)d\Omega e^{i\Omega t}$$

所引起的反应为

$$\frac{1}{2\pi}W_{1k}(i\Omega)F(\Omega)d\Omega e^{i\Omega t}.$$

---

① 見, 例如, Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., 1956, т. 2, 24 章, §3. 或 Фихтенгольц Г. М., 微积分学教程, 第三卷第三分册, 第十九章, §6, 余家荣譯, 1955。——譯者注。

因之，根据反应的綫性叠加原理，便有：

$$q_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}W_{1k}(i\Omega)F(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega \tag{19}$$

$$(k=1,\cdots,n),$$

即坐标 q_k 的复譜 $W_{1k}(i\Omega)F(\Omega)$ 可由外界作用 $Q_1(t)$ 的复譜乘以对应的系統頻率特性 $W_{1k}(i\Omega)$ 而得到。

假設当 $t<0$ 时，系統处于静止状态：

$$\left.\begin{array}{l}Q_1(t)=0,\\ q_k(t)=0\ \ (k=1,\cdots,n)\end{array}\right\}\text{当 } t<0 \text{ 时。} \tag{20}$$

将反应的复譜写成如下形式：

$$F(\Omega)W_{1k}(i\Omega)=G(\Omega)+iH(\Omega), \tag{21}$$

则由公式(19)便有：

$$q_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[G(\Omega)+iH(\Omega)][\cos\Omega t+i\sin\Omega t]d\Omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[G(\Omega)\cos\Omega t-H(\Omega)\sin\Omega t]d\Omega+$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[G(\Omega)\sin\Omega t+H(\Omega)\cos\Omega t]d\Omega.$$

因为 $q_k(t)$ 是实函数，故右端第二項等于零，因之，

$$q_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[G(\Omega)\cos\Omega t-H(\Omega)\sin\Omega t]d\Omega. \tag{22}$$

另一方面，当 $t<0$ 时，$q_k(t)=0$，故有

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[G(\Omega)\cos\Omega t-H(\Omega)\sin\Omega t]d\Omega\ \ (\text{当 } t<0 \text{ 时}).$$

在此，以 $-t$ 代 t，則有：

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[G(\Omega)\cos\Omega t+H(\Omega)\sin\Omega t]d\Omega \quad (当\ t>0\ 时). \tag{23}$$

将等式(22)和(23)逐項相加，則得：

$$q_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\Omega)\cos\Omega t d\Omega \quad (当\ t>0\ 时). \tag{24}$$

現在假設外界作用的复譜可以写成如下形式：

$$F(\Omega)=A(\Omega)e^{i\Phi(\Omega)}. \tag{25}$$

于是，按公式(21)便有：

$$G(\Omega)=R_{1k}(\Omega)A(\Omega)\cos[\Phi(\Omega)+\Psi_{1k}(\Omega)], \tag{26}$$

而公式(24)則可以写成如下的最終形式：

$$q_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{1k}(\Omega)A(\Omega)\cos[\Phi(\Omega)+\Psi_{1k}(\Omega)]\cos\Omega t d\Omega \quad (当\ t>0\ 时). \tag{27}$$

第七章　有循环坐标的系統

§ 48. 导出系統·罗司势·隐运动·赫兹关于动能产生势能的概念

本章将利用第二、五两章所讲的一般原理，来研究具有循环坐标 $q_\alpha(\alpha=m+1,\cdots,n)$ 的完整平稳系統的运动。这种系統的动能具有形式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n}a_{rs}(q_1,\cdots,q_m)\dot{q}_r\dot{q}_s. \tag{1}$$

我們来找以罗司变量 $q_i, \dot{q}_i, p_\alpha(i=1,\cdots,m;\alpha=m+1,\cdots,n)$表示的动能表达式。为此，利用原始关系

$$p_\alpha=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}=\sum_{i=1}^{m}a_{\alpha i}\dot{q}_i+\sum_{\beta=m+1}^{n}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta\quad(\alpha=m+1,\cdots,n) \tag{2}$$

将所有的 $\dot{q}_\alpha$ 以 $p_\alpha(\alpha=m+1,\cdots,n)$表出。

由于行列式 $D=\det(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=m+1}^{n}\neq 0$①，故由关系式 (2) 即可求得：

$$\dot{q}_\alpha=\sum_{\beta=m+1}^{n}b_{\alpha\beta}\left(p_\beta-\sum_{i=1}^{m}a_{\beta i}\dot{q}_i\right)\quad(\alpha=m+1,\cdots,n), \tag{3}$$

其中 $\|b_{\alpha\beta}\|_{m+1}^{n}$ 是矩陣 $\|a_{\alpha\beta}\|_{m+1}^{n}$ 的逆矩陣，即：

$$\|b_{\alpha\beta}\|=\|a_{\alpha\beta}\|^{-1}. \tag{4}$$

令

$$\gamma_{\alpha i}=\sum_{\beta=m+1}^{n}b_{\alpha\beta}a_{\beta i}\quad(i=1,\cdots,m;\alpha=m+1,\cdots,n), \tag{5}$$

---

① 見第 73 頁上的脚注。

則关系式(3)便可以写成如下形式:

$$\dot{q}_\alpha=\sum_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}p_\beta-\sum_{i=1}^{m}\gamma_{\alpha i}\dot{q}_i\quad(\alpha=m+1,\cdots,n).\tag{6}$$

这里 $b_{\alpha\beta}$ 和 $\gamma_{\alpha i}$ 都是非循环坐标(或称之为位置坐标) $q_i(i=1,\cdots,m)$的函数。将 $\dot{q}_\alpha$ 的表达式(6)代入公式(1),即得以罗司变量表示的动能表达式$\widehat{T}$:

$$\widehat{T}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}a^*_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n}a^*_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=m+1}^{n}a^*_{i\alpha}\dot{q}_i p_\alpha.\tag{7}$$

妙的是在这个表达式中,所有$a^*_{i\alpha}=0$(罗司早就注意到了这点),即表达式$\widehat{T}$是非循环速度 $\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_m$ 的二次型与广义沖量$p_{m+1},\cdots,p_n$ 的二次型之和①。

事实上,因为 $\sum\limits_{\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}p_\beta$ 仅与变量 q_i 和 p_β 有关,而这些变量又被看作是和 $\dot{q}_i(i=1,\cdots,m;\beta=m+1,\cdots,n)$无关的,故

$$a^*_{i\alpha}=\frac{\partial^2\widehat{T}}{\partial\dot{q}_i\partial p_\alpha}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\sum_{\beta=m+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\beta}\frac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\sum_{\beta=m+1}^{n}b_{\beta\alpha}p_\beta=0.\tag{8}$$

我們現在計算系数 $a^*_{\alpha\beta}$:

$$a^*_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2\widehat{T}}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\sum_{\gamma=m+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\gamma}\frac{\partial\dot{q}_\gamma}{\partial p_\beta}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\sum_{\gamma=m+1}^{n}b_{\gamma\beta}p_\gamma=b_{\alpha\beta}$$
$$(\alpha,\beta=m+1,\cdots,n).\tag{9}$$

类似地可以得到系数 a^*_{ij}②:

① 这里所采用的由变量 $\dot{q}_i,\dot{q}_\alpha$ 到变量 $\dot{q}_i,p_\alpha$ 的变量变换,常被用于(按拉格朗日方法)化二次型为平方和的二次型理論中。事实上,将类似的变换运用若干次之后,就可以将 n 个变量的二次型化为 n 个二次型之和的形式,而这 n 个二次型的每一个只与一个变量有关(即一个变量的平方与某一实系数的乘积)。

② 这里及以后 $\dot{q}_\alpha=\cdots$都表示在方括弧里的表达式中,所有的 $\dot{q}_\alpha$ 应以其表达式(6)代之。

$$a^*_{ij}=\frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}+\sum_{\alpha=m+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}_\alpha=\cdots}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}_\alpha=\cdots}-\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sum_{\alpha=m+1}^{n}\gamma_{\alpha i}p_\alpha=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}_\alpha=\cdots}=$$

$$=\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}+\sum_{\alpha=m+1}^{n}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_i}=a_{ij}-\sum_{\alpha=m+1}^{n}\gamma_{\alpha i}a_{\alpha j}.$$

利用等式(5)，得:

$$a^*_{ij}=a_{ij}-\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n}b_{\alpha\beta}a_{\alpha j}a_{\beta i}\quad (i,\ j=1,\cdots,m). \tag{10}$$

但根据等式(4)，$b_{\alpha\beta}=\frac{A_{\beta\alpha}}{D}$，其中 $A_{\beta\alpha}$ 是行列式 D 中元素 $a_{\beta\alpha}$ 的代数余子式。借此关系可将公式(10)写成

$$a^*_{ij}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i,m+1} & \cdots & a_{in}\\ a_{m+1,j} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{nj} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\quad (i,\ j=1,\cdots,m). \tag{10'}$$

于是，公式(7)有如下形式:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}a^*_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n}b_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta. \tag{11}$$

这里系数 a^*_{ij} 和 $b_{\alpha\beta}$ 分别由等式(4)和(10)来决定。

假設作用在平稳系統上的力有势 $\Pi=\Pi(t, q_i)$，则 $L=T-\Pi$。现在計算罗司函数(见 §13):

$$R=R(t, q_i, \dot{q}_i, p_\alpha)=\sum_{\alpha=m+1}^{n}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L=$$

$$=\sum_{\alpha=m+1}^{n}p_\alpha\left(\sum_{\beta=m+1}^{n}b_{\alpha\beta}p_\beta-\sum_{i=1}^{m}\gamma_{\alpha i}\dot{q}_i\right)-T+\Pi=$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a^*_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta +$$

$$+ \Pi - \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{\alpha=m+1}^{n}\gamma_{\alpha i}p_\alpha\right)\dot{q}_i. \tag{12}$$

我們来考查被称为罗司势[1]的函数 $\Pi^*(t, q_i, p_\alpha)$:

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta. \tag{13}$$

利用关系

$$b_{\alpha\beta} = \frac{A_{\beta\alpha}}{D}$$

(其中 $A_{\beta\alpha}$ 是行列式 D 中元素 $a_{\beta\alpha}$ 的代数余子式)可将罗司势的表达式写成

$$\Pi^* = \Pi - \frac{1}{2D}\begin{vmatrix} 0 & p_{m+1} & \cdots & p_n \\ p_{m+1} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{13'}$$

的形式。此外,令

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a^*_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{14}$$

于是,根据等式(12),对于非循环坐标起着拉格朗日函数作用的函数 $-R$ 便等于

$$T^* - V, \tag{15}$$

其中 V 是广义势,由下式确定:

$$V = -\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{\alpha=m+1}^{n}\gamma_{\alpha i}p_\alpha\right)\dot{q}_i + \Pi^*(t, q_i, p_\alpha). \tag{16}$$

現在来考查原系統的任何一个运动。在此运动中,

---

① Routh E. G., The advanced part of a treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies, 5th. ed., 1892, § 99.

$$p_\alpha = \text{const} = c_\alpha \quad (\alpha = m+1, \cdots, n), \tag{17}$$

非循环坐标 $q_i = q_i(t)(i=1, \cdots, m)$ 可由第 76 頁上的微分方程組(8)来确定，这方程組中所有的 p_α 全应代之以 $c_\alpha(\alpha=m+1, \cdots, n)$。但此方程組乃是拉格朗日函数为 $-R=T^*-V$ 的某一輔助系統的拉格朗日方程組。該輔助系統乃一自然平稳系統，有 m 个自由度，

动能 $T^* = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a^*_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$，广义力的势

$$V = -\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{\alpha=m+1}^{n}\gamma_{\alpha i}c_\alpha\right)\dot{q}_i + \Pi^*(t, q_i, c_\alpha).$$

罗司势 $\Pi^*(t, q_i, c_\alpha)$ 是該系統的势能。由公式(11)—(13)可得：

$$T + \Pi = T^* + \Pi^*. \tag{18}$$

我們称此輔助系統为导出系統。

因此，非循环坐标 $q_1, \cdots, q_m$ 的变化决定了动能为 T^*，广义势为 $V=V_1+\Pi^*$（Π^* 是罗司势），自由度为 m 的导出系統的运动。在原系統和导出系統的对应运动中，二系統总能量彼此相等。

当决定导出系統的运动的函数 $q_i=q_i(t)(i=1, \cdots, m)$ 已經求得时，循环坐标随时間的变化 $q_\alpha = q_\alpha(t)(\alpha=m+1, \cdots, n)$ 便可由第 76 頁上的公式(9)来决定，这些公式現在可以写成如下形式：

$$q_\alpha = \int\left[\frac{\partial \Pi^*(t, q_i, c_\alpha)}{\partial c_\alpha} - \sum_{j=1}^{m}\gamma_{\alpha j}(q_i)\dot{q}_j\right]dt + c'_\alpha$$

$$(\alpha = m+1, \cdots, n). \tag{19}$$

我們来看原系統的动能表达式(1)不包含非循环速度 $\dot{q}_i$ 和循环速度 $\dot{q}_\alpha$ 之积的这一特殊情况，即所有的 $a_{i\alpha}=0(i=1, \cdots, m;\ \alpha=m+1, \cdots, n)$。在此情况下，动能 T 被分为两个二次型，其一仅包含非循环速度 $\dot{q}_i$，而另一个仅包含循环速度 $\dot{q}_\alpha$。这种系統叫做迴轉无关系統。对于迴轉无关系統，根据公式(5)，所有的 $\gamma_{\alpha i}=0$，

因而，$V_1=0, V=\Pi^*$。因此，如果原系統是迴轉无关的，則导出系統具有通常的势Π^*①。

此外，由等式(10)可知，对于迴轉无关系統，$a_{ij}^*=a_{ij}(i, j=1, \cdots, m)$，即

$$T^*=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{20}$$

在此情形，原系統有动能

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}c_\alpha c_\beta$$

和势能 $\Pi=\Pi(t, q_i)$，而导出系統則有动能

$$T^*=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

和势能

$$\Pi^*=\Pi(t, q_i)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}c_\alpha c_\beta.$$

这表明原系統的部分动能$\left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} b_{\alpha\beta}c_\alpha c_\beta\right)$轉化为导出系統的势能。

关于平稳系統的前述种种論断，对于保守系統［对此系統有$\frac{\partial\Pi}{\partial t}=0$，即$\Pi=\Pi(q_i)$］仍然正确。迴轉无关的保守系統，其导出系統仍然是保守的。

假設給定一任意保守系統，它有m个自由度，动能为

$$T^*=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(q_1, \cdots, q_m)\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

---

① 在导出系統上，作用着有势力$-\frac{\partial\Pi^*}{\partial q_i}$和决定于势$V_1$的迴轉仪力。在迴轉无关系統的情况下，$V_1=0$，因之沒有迴轉仪力。

势能为 $\Pi^*=\Pi^*(q_i)$。另外，考查这样一个保守系統，它有 $m+1$ 个自由度，有 m 个位置坐标 $q_1, \cdots, q_m$，一个循环坐标 q_{m+1}。

設新系統的势能 $\Pi=0$，动能有如下形式：

$$T=T^*+\frac{1}{2}\frac{k}{\Pi^*(q_i)}\dot{q}_{m+1}^2 \quad (k=\text{const}).$$

于是

$$p_{m+1}=\frac{k}{\Pi^*(q_i)}\dot{q}_{m+1},$$

以及

$$T=T^*+\frac{1}{2k}\Pi^*(q_i)p_{m+1}^2.$$

而当 $p_{m+1}=c_{m+1}=\sqrt{2k}$ 时，

$$\frac{1}{2k}\Pi^*(q_i)p_{m+1}^2=\Pi^*(q_i).$$

因此，給定的保守系統有动能 T^* 和势能 $\Pi^*=\Pi^*(q_i)$，而新的"扩展"系統有 $T=T^*+\Pi^*(q_i)$，$\Pi=0$。

給定系統的势能可得自自由度較大的"扩展"系統的动能。

仅循环坐标（隐坐标）在改变的那种运动，有时称为隐运动①。

前面我們已經看到，保守系統的势能永远可以看作隐运动的动能。

关于动能产生势能的这一概念，亦即动能产生作用在实現显运动（非隐运动）的物体上的力的概念，曾由赫兹在其"力学原理"（1894 年）②一书中广为发展。

---

① 包含迴轉仪的系統是表現隐运动的明显例子。由于迴轉仪的"隐"运动，使得这种系統和无迴轉仪的系統在运动上有着显著的差别。

② Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, М., 1959, 也可以参閱 Thomson W. and Tait P., Treatise on natural philosophy, Part 1, §319 及 A. Вебстер, Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, М., 1933, 第五章。

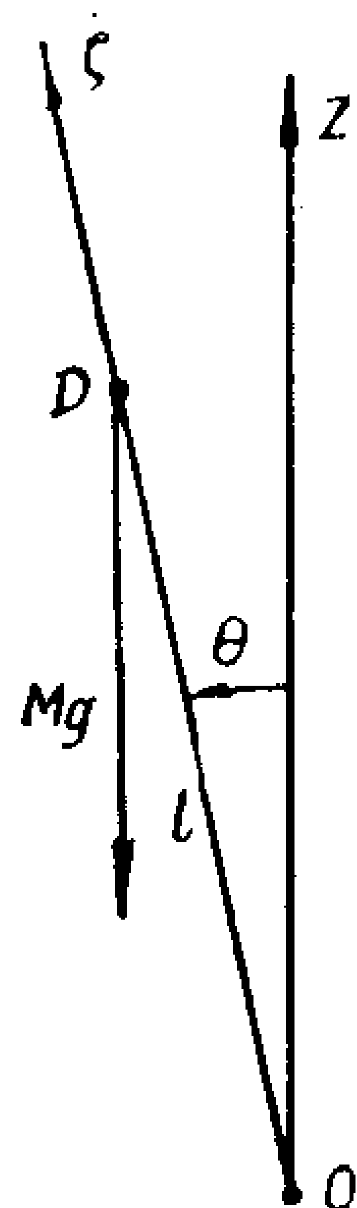


图　54.

例題．我們来看剛体繞定点 O 运动的拉格朗日情况：剛体有动力对称軸，且重心 D 位于此軸上，作用力为其重量 Mg。

剛体的位置可借三个欧拉角 θ，ψ，φ 給定，其中章动角 θ 是鉛直軸 Oz 和动力对称軸 $O\zeta$ 間的夹角（图 54），ψ 是进动角，φ 是自轉角。令 $l=OD$，A 和 C 分别表示赤道轉动慣量和軸轉动慣量。于是，有：

$$2T=A(p^2+q^2)+Cr^2,\quad \Pi=Mgl\cos\theta,$$

式中 p, q, r 是角速度 ω 分别在慣性主軸 $O\xi, O\eta, O\zeta$ 上的投影。但

$$p^2+q^2=\dot\theta^2+\dot\psi^2\sin^2\theta,\quad r=\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta.$$

因之最后便有：

$$2T=A(\dot\theta^2+\dot\psi^2\sin^2\theta)+C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)^2,\quad \Pi=Mgl\cos\theta。\tag{21}$$

由此即得对应于循环坐标 φ, ψ 的广义冲量 p_φ, p_ψ 的表达式：

$$\left.\begin{aligned} p_\psi&=(A\sin^2\theta+C\cos^2\theta)\dot\psi+C\cos\theta\dot\varphi,\\ p_\varphi&=C\cos\theta\dot\psi+C\dot\varphi. \end{aligned}\right\}\tag{22}$$

由这些关系中解出 $\dot\psi$ 和 $\dot\varphi$，得：

$$\left.\begin{aligned} \dot\psi&=\frac{p_\psi-\cos\theta p_\varphi}{A\sin^2\theta},\\ \dot\varphi&=\frac{-C\cos\theta p_\psi+(A\sin^2\theta+C\cos^2\theta)p_\varphi}{AC\sin^2\theta}. \end{aligned}\right\}\tag{23}$$

(23)式右端 p_ψ 和 p_φ 的系数乃是量 $b_{\alpha\beta}$。将 $\dot\varphi$ 和 $\dot\psi$ 的表达式 (23) 代入 (21)式中关于 $2T$ 的表达式，或直接根据公式(11)①，我們便得到以罗司变量 $\theta, \dot\theta, p_\psi, p_\varphi$ 表示的动能表达式：

$$2T=A\dot\theta^2+\frac{Cp_\psi^2-2C\cos\theta p_\psi p_\varphi+(A\sin^2\theta+C\cos^2\theta)p_\varphi^2}{AC\sin^2\theta}.\tag{24}$$

当系統运动时，冲量 p_ψ 和 p_φ 保持其値不变：

$$p_\psi=a,\quad p_\varphi=b.\tag{25}$$

章动决定于

$$T^*=\frac{1}{2}A\dot\theta^2,\ \Pi^*=Mgl\cos\theta+\frac{(a-b\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}+\frac{b^2}{C}\tag{26}$$

① 在所給情况下，剛体是迴轉无关系統。此时，在公式(11)中，$a_{ij}^*=a_{ij}(i, j=1,\cdots,m)$。

的导出系統。

章动角的变化 $\theta=\theta(t)$ 可由如下的能量积分求得：

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2+Mgl\cos\theta+\frac{(a-b\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}=\text{const}=h. \tag{27}$$

現在引入一个輔助变量 $u=\cos\theta$, 并以 $\frac{2}{A}(1-u^2)=\frac{2}{A}\sin^2\theta$ 乘等式(27)的两端，得：

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=f(u), \tag{28}$$

其中 $f(u)$ 是关于 u 的三次多項式：

$$f(u)=\frac{2}{A}(h-Mglu)(1-u^2)-\frac{2}{A^2}(a-bu)^2. \tag{29}$$

在此表达式中令 $u=\pm1$, $u=u_0=\cos\theta_0<1$, 则得①：

$$f(-1)<0,\quad f(u_0)=\left(\frac{du}{dt}\right)_0^2>0,\quad f(+1)<0.$$

又因 $f(+\infty)=+\infty$, 故多項式 $f(u)$ 有三个实根 $u_1=\cos\theta_1$, $u_2=\cos\theta_2$ 和 u', 而且，

$$-1<u_1<u_2<1<u'.$$

多項式 $f(u)$ 的图形如图 55 所示。

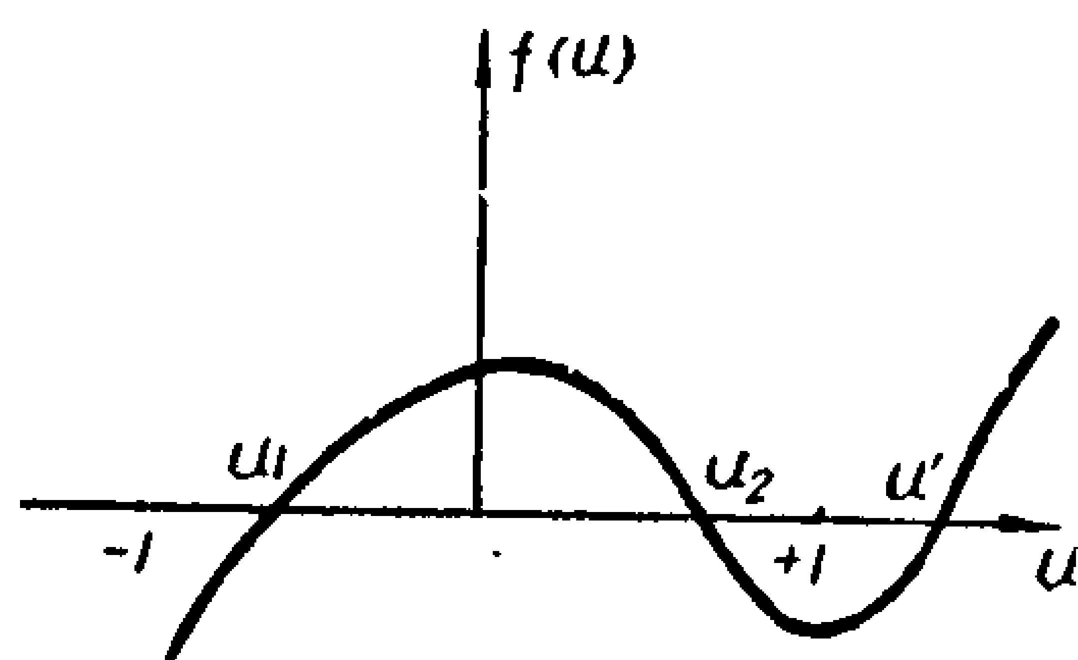


图 55.

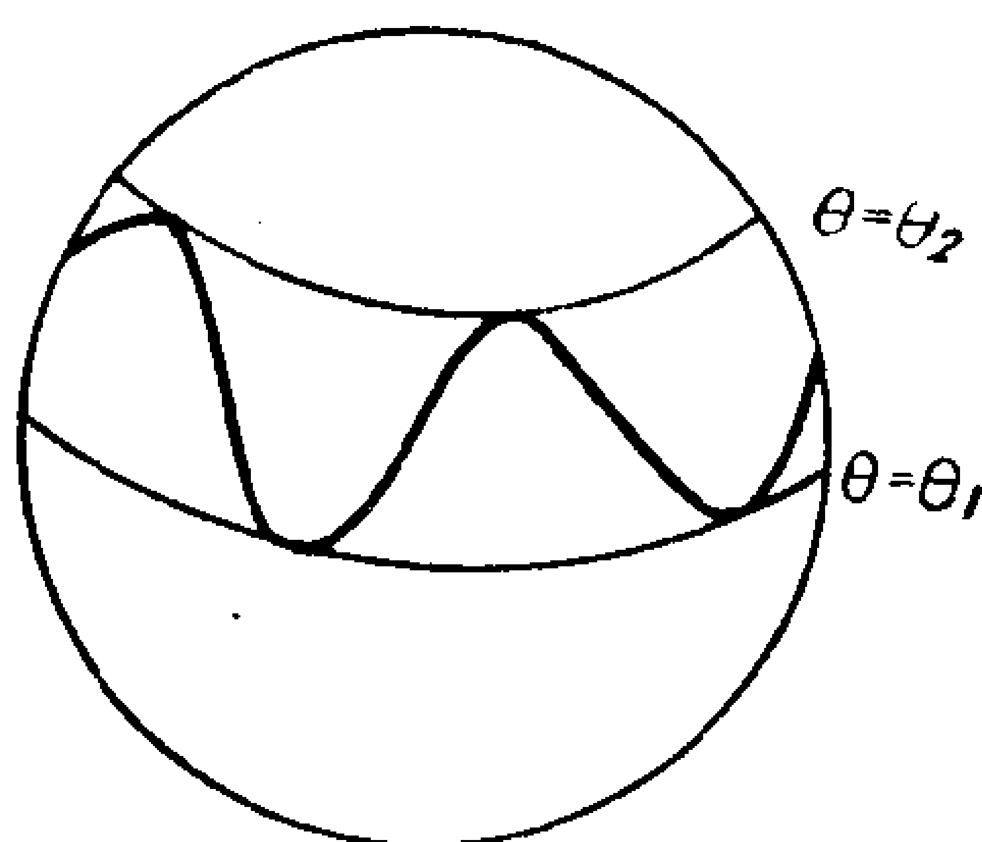


图 56.

因为当物体运动时，$-1\leqslant u=\cos\theta\leqslant+1$, $f(u)=\left(\frac{du}{dt}\right)^2\geqslant0$, 故量 $u==\cos\theta$ 应在区間 $u_1\leqslant u\leqslant u_2$ 内变化，即 $\theta_1\geqslant\theta\geqslant\theta_2$。进动角速度可由(23)式中头一个公式来确定：

① 这里我們假設 $a\neq\pm b$。$a=\pm b$ 的特殊情况将在下面討論。此外，初始值 θ_0 是这样选擇的，它使得 $\dot{\theta}_0\neq0$, 因而，$\left(\frac{du}{dt}\right)_0\neq0$.

$$\dot{\psi}=\frac{a-b\cos\theta}{A\sin^2\theta}. \tag{30}$$

若比值$\frac{a}{b}$在区間$u_1 \leq u \leq u_2$之外，則进动速度$\dot{\psi}$不变号，进动永远朝着一个方向行进。此时，$O\zeta$軸在以O为中心的球面上截出一条如图 56 所示之曲綫。

若$u_1<\frac{a}{b}<u_2$，則进动速度将在$\cos\theta^*=\frac{a}{b}$时变号，动力对称軸在球面上截出一条如图 57 所示的曲綫。

若$\frac{a}{b}=u_2$，則进动速度$\dot{\psi}$不变号，但在高緯圈$\theta=\theta_2$处变为零（图 58）①。

章动角的变化可以解析地由下列公式确定：

$$\pm\int\frac{du}{\sqrt{f(u)}}=t+\text{const},\quad \theta=\arccos u. \tag{31}$$

这里，当θ由θ_2变到θ_1时取“+”号，当θ按相反方向改变时取“－”号。显然，θ角随时間的变化是周期的，周期为

$$\tau=2\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\sqrt{f(u)}}, \tag{32}$$

我們以$\theta(t)$記此函数。求得章动角的变化$\theta=\theta(t)$之后，角ψ和角φ的变化便可按公式(23)来确定。

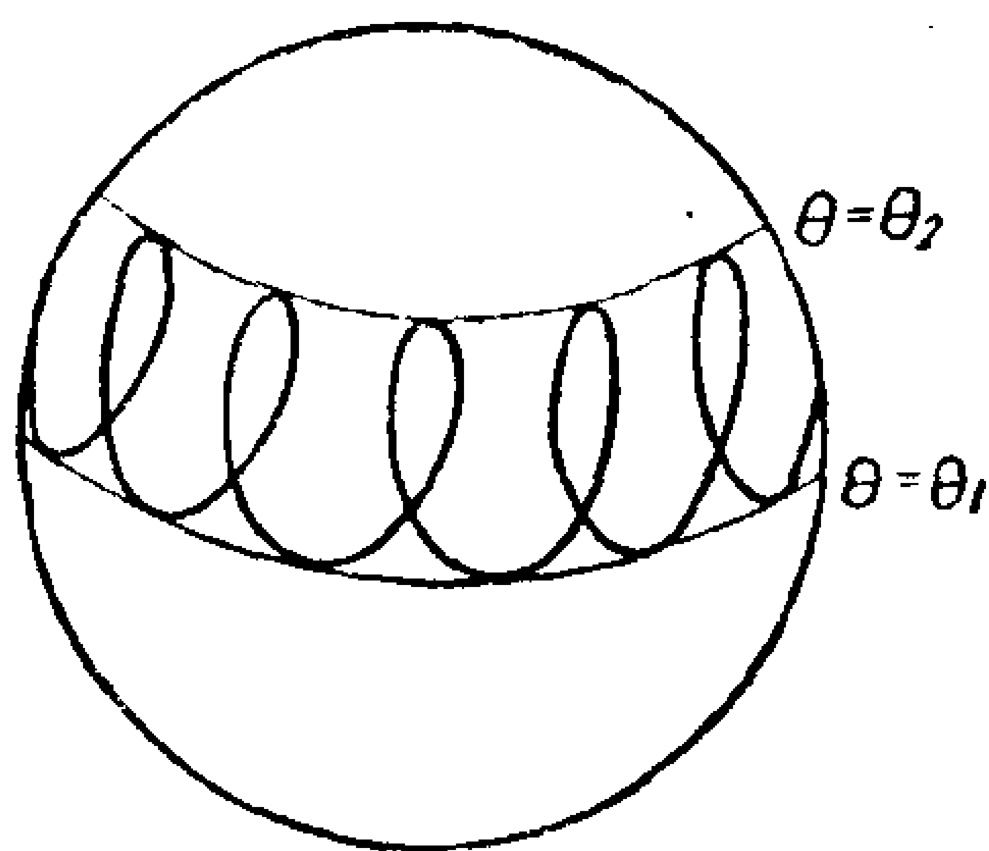


图　57.

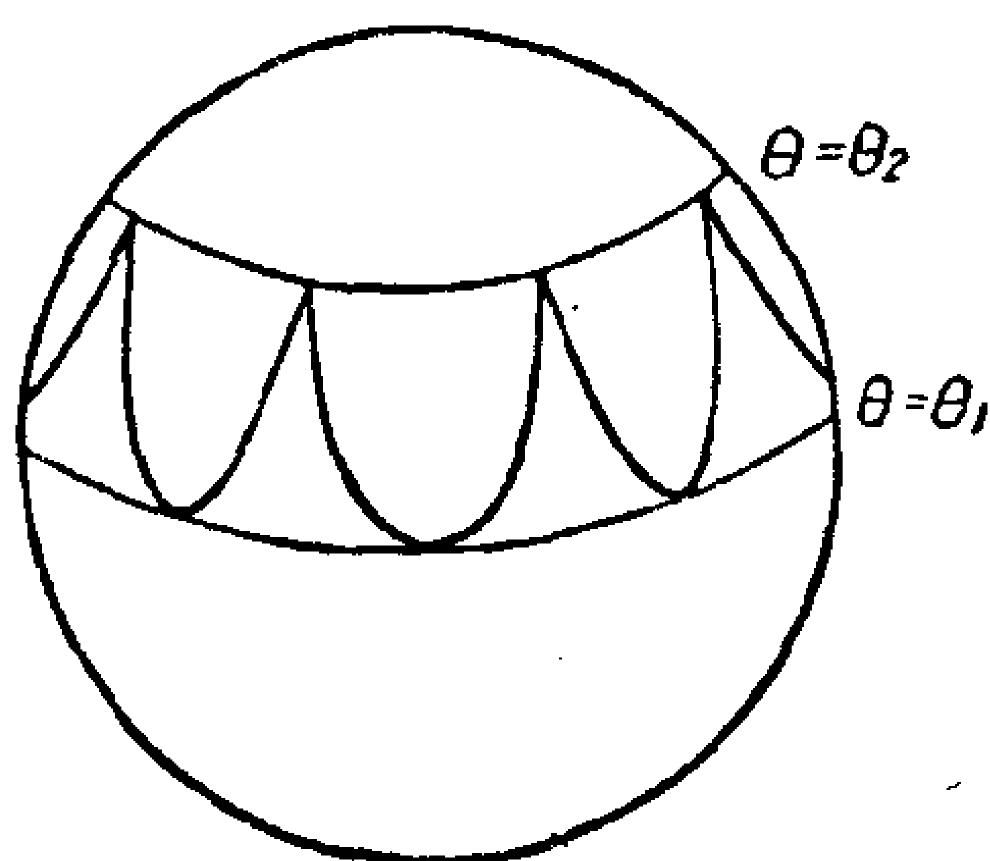


图　58.

現在来考察剛体通过“奇异”位置$\theta=0$时的运动。在这个点上，动能由如下的、退化了的二次型［見当$\theta=0$时的表达式(21)］来給定：

① 可以証明$\dot{\psi}$不可能在低緯圈上变为零。

$$2T = A\dot{\theta}^2 + C(\dot{\psi} + \dot{\varphi})^2. \tag{33}$$

根据公式(22)，在奇点 $\theta=0$ 处，等式 $p_\psi = p_\varphi$ 应当成立，即

$$a = b. \tag{34}$$

若令任意常数 a 和 b 满足关系式(34)，則罗司势表达式(26)的不确定性将不复存在①：

$$\Pi^* = Mgl\cos\theta + \frac{a^2}{A}\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

于是，章动仍可由能量积分 $T^* + \Pi^* = \text{const}$ 来确定。

若运动通过"奇异"位置 $\theta=\pi$，則将有关系式

$$a = -b,$$

代替(34)且罗司势的表达式取如下形式：

$$\Pi^* = Mgl\cos\theta + \frac{a^2}{A}\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}.$$

在所討論的两种"奇异"情况下，图 56—58 上的高緯圈或低緯圈都分别退化为一点。

§ 49. 平稳运动的稳定性

我們来考察一保守系統，它的位置可由 m 个位置坐标 q_i 和 $n-m$ 个循环坐标 q_α $(i=1,\cdots,m;\ \alpha=m+1,\cdots,n)$ 給定。該系統的运动决定于正則方程組：

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r},\quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}\qquad (r=1,\cdots,n), \tag{1}$$

其中系統的总能量 $H = H(q_i, p_i, p_\alpha)$ 具有

$$H = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} c_{rs}(q_1,\cdots,q_m)p_r p_s + \Pi(q_1,\cdots,q_m) \tag{2}$$

的形式，且其右端的二次型是正定的②。当系統运动时，函数 H 和广义冲量 p_α $(\alpha=m+1,\cdots,n)$ 均保持其值不变，即这些量都是运动

① 在 Π^* 的表达式中我們去掉了可加常数 $\frac{b^2}{B}$。

② 这个二次型乃是以广义冲量表示的系統的动能。

积分:

$$\left.\begin{aligned}&H(q_i, p_i, p_\alpha)=H(q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0)\\&p_\alpha=p_\alpha^0 \qquad (\alpha=m+1,\cdots,n).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

若在系統运动中，所有位置坐标保持常值 $q_i=\text{const}=q_i^0\ (i==1,\cdots,m)$，则此运动称为平稳运动。

在平稳运动中，所有位置速度都等于零，因而按照方程(1)和等式(2)便有:

$$\dot{q}_i=\sum_{k=1}^{m}c_{ik}(q_i^0)p_k+\sum_{\alpha=m+1}^{n}c_{i\alpha}(q_i^0)p_\alpha^0=0 \quad (i=1,\cdots,m). \tag{4}$$

由这些关系式可以断定①，在平稳运动中，所有非循环冲量也将保持常值 $p_i=\text{const}=p_i^0$。由于 $\dot{q}_i=\dot{p}_i=0\ (i=1,\cdots,m)$，故由方程(1)推知: 在平稳运动中，

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=0,\quad \frac{\partial H}{\partial p_i}=0 \quad (i=1,\cdots,m). \tag{5}$$

方程(5)乃是使按初值 $q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0\ (i=1,\cdots,m;\ \alpha=m+1,\cdots,n)$ 所决定的运动成为平稳运动时，这些初值所应满足的必要充分条件。

还应注意的是，按照方程(1)，

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\sum_{s=1}^{n}c_{\alpha s}(q_i^0)p_s^0=\text{const} \qquad (\alpha=m+1,\cdots,n), \tag{6}$$

故在平稳运动中，循环速度 $\dot{q}_\alpha\ (\alpha=m+1,\cdots,n)$ 的值也不变。因此，

$$q_\alpha=\dot{q}_\alpha^0(t-t_0)+q_\alpha^0 \qquad (\alpha=m+1,\cdots,n). \tag{7}$$

初始循环坐标 q_α^0 是任意常数，不在条件(5)中出現。

---

① 因为二次型 $\sum_{r,s=1}^{n}c_{rs}p_rp_s$ 是正定的，所以行列式 $\det[c_{ik}(q_j^0)]_{i,k=1}^{m}\neq 0$，因而可由关系式(4)将非循环冲量 p_k 解出来。

因此，在平稳运动中，位置坐标保持常值，而循环坐标按綫性規律改变。

例题. 对称重力陀螺的規則进动是平稳运动。

事实上，規則进动为如下等式所刻划：

$$\theta=\text{const}=\theta_0,\quad \dot{\psi}=\text{const},\quad \dot{\varphi}=\text{const},$$

其中进动角 ψ 和自轉角 φ 都是循环坐标，而陀螺对称軸和鉛直方向的夹角 θ——章动角則是位置坐标①。

我們应当注意，按照关系式(6)，初值 q_i^0, p_i^0, p_α^0 的微小改变将引起初始循环速度 $\dot{q}_\alpha^0\,(\alpha=m+1,\cdots,n)$ 的微小改变。但是，按照公式(7)，量 $\dot{q}_\alpha^0$ 的微小变化将使循环坐标本身的改变，随时間的增长要多大就有多大。因此，就循环坐标而言，平稳运动不可能稳定。

往下我們将把平稳运动的稳定性理解为就所有冲量 p_i 和 p_α 以及位置坐标 $q_i\,(i=1,\cdots,m;\ \alpha=m+1,\cdots,n)$ 而言的穩定性②。

于是，如下的**平稳运动稳定性准則**成立：

若函数 $H(q_i, p_i, p_\alpha^0)$ 在点 $q_i=q_i^0,\ p_i=p_i^0\,(i=1,\cdots,m)$ 有严格极值，則初始数据为 $q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0\,(i=1,\cdots,m;\ \alpha=m+1,\cdots,n)$ 的运动是穩定的平穩运动。

事实上，由于函数 $H(q_i, p_i, p_\alpha^0)$ 有极值，故量 $q_i^0, p_i^0\,(i=1,\cdots,m)$ 和量 $p_\alpha^0\,(\alpha=m+1,\cdots,n)$ 一同滿足方程(5)，因之，所討論的运动首先是平稳的。現在引入偏差：

$$\xi_i=q_i-q_i^0,\ \eta_i=p_i-p_i^0,\ \eta_\alpha=p_\alpha-p_\alpha^0.$$

于是，当取运动积分 $H(q_i^0+\xi_i, p_i^0+\eta_i,\ p_\alpha^0)$ 作为李亚普諾夫函数时，在循环冲量 p_α 不受扰动（即这些量对于被扰运动和未被扰运动有相同的值 p_α^0 ③）的假設下，便可以作出关于零解 $\xi_i=0, \eta_i=0$

---

① 由前节公式(21)可見，坐标 φ 和 ψ 都不显含在动能和势能的表达式中。

② 或关于量 $q_i, \dot{q}_i, p_\alpha\,(i=1,\cdots,m;\ \alpha=m+1,\cdots,n)$ 的稳定性，也一样。

③ 罗司所討論的正是这种类型的稳定性。

的稳定性(即平稳运动的稳定性)的結論(見第 178 頁)。

但上述稳定性准則，对于被扰运动偏差 $\eta_\alpha=p_\alpha-p_\alpha^0(\alpha=m+1,\cdots,n)$ 可能异于零的一般情况下，仍然是有效的①。为了証实这一論断，只要取函数

$$[H(q_i^0+\xi_i, p_i^0+\eta_i, p_\alpha^0)-H(q_i^0, p_i^0, p_\alpha^0)]^2+\sum_{\alpha=m+1}^{n}\eta_\alpha^2 \tag{8}$$

作为李亚普諾夫函数，并利用李亚普諾夫定理的推論(第 178 頁)就行了。函数(8)是一个运动积分，在 $\xi_i=0, \eta_i=0, \eta_\alpha=0(i=1,\cdots,m; \alpha=m+1,\cdots,n)$ 时有严格极小值，等于零。

現在来建立平衡状态稳定性和平稳运动稳定性之間的类比关系。为此，我們考察有 m 个独立坐标 $q_1,\cdots,q_m$ 的导出系統，它的势能等于罗司势:

$$\Pi^*(q_i, p_\alpha^0)=\Pi(q_i)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n}b_{\alpha\beta}(q_i)p_\alpha^0 p_\beta^0 \tag{9}$$

(見前一节)。在导出系統上，除有势力 $-\frac{\partial\Pi^*}{\partial q_i}(i=1,\cdots,m)$ 而外，还作用有迴轉仪力。因为与原系統的平稳运动 $q_i=q_i^0, p_\alpha=p_\alpha^0(i=1,\cdots,m; \alpha=m+1,\cdots,n)$ 相对应的是导出系統的平衡位置，故量 q_i^0, p_α^0 应滿足方程

$$\frac{\partial\Pi^*(q_i, p_\alpha^0)}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,\cdots,m). \tag{10}$$

这是存在平稳运动的必要充分条件。显然，这些条件和条件(5)是等价的，可由条件(5)消去量 $p_i(i=1,\cdots,m)$ 后得到。将拉格朗日定理用于导出系統的平衡位置 $q_i=q_i^0$，即得如下形式的平稳运动稳定性准則。

若罗司势 $\Pi^*(q_i, p_\alpha^0)$ 在 $q_i=q_i^0(i=1,\cdots,m)$ 时有严格极小值，

---

① Пожарицкий Г. К., Прикладная математика и механика, т. 22, вып. 2, 1958.

则初始数据为 $q_i^0, \dot{q}_i^0=0, p_\alpha^0 (i=1, \cdots, m; \alpha=m+1, \cdots, n)$ 的运动是稳定的平稳运动。

将拉格朗日定理用于导出系統时，我們曾規定循环冲量 $p_\alpha= =p_\alpha^0 (\alpha=m+1, \cdots, n)$ 保持其值不变。但上述准則即使在冲量 p_α^0 改变的情况下也还是有效的。为了证明这一点，取运动积分

$$[E^*(q_i^0+\xi_i, \dot{q}_i, p_\alpha^0)-E^*(q_i^0, 0, p_\alpha^0)]^2+\sum_{\alpha=m+1}^{n} \eta_\alpha^2 \qquad (11)$$

作为李亚普諾夫函数就够了，其中 $E^*=T^*+\Pi^*$ 是导出系統的总能量［它和以罗司变量 $q_i, \dot{q}_i, p_\alpha$ 表示的原系統的总能量相同（見§48）］，$\xi_i=q_i-q_i^0, \dot{q}_i, \eta_\alpha=p_\alpha-p_\alpha^0 (i=1, \cdots, m; \alpha=m+1, \cdots, n)$ 是被扰运动(偏离給定平稳运动)的偏差。函数(11)在 $\xi_i=0, \dot{q}_i=0, \eta_\alpha=0 (i=1, \cdots, m; \alpha=m+1, \cdots, n)$ 时有严格极小值(等于零)。

罗司于 1884 年曾以稍为不同的形式建立了这里所引入的平稳运动稳定性准則。

例題. 确定非均匀重球在光滑水平面上的稳定平稳运动。設球的重心 D 离它的几何中心 O 的距离为 d，球的质量为 M，对于 OD 軸的轉动慣量为 C，其它两个中心主轉动慣量彼此相等：$A=B$（图 59）①。

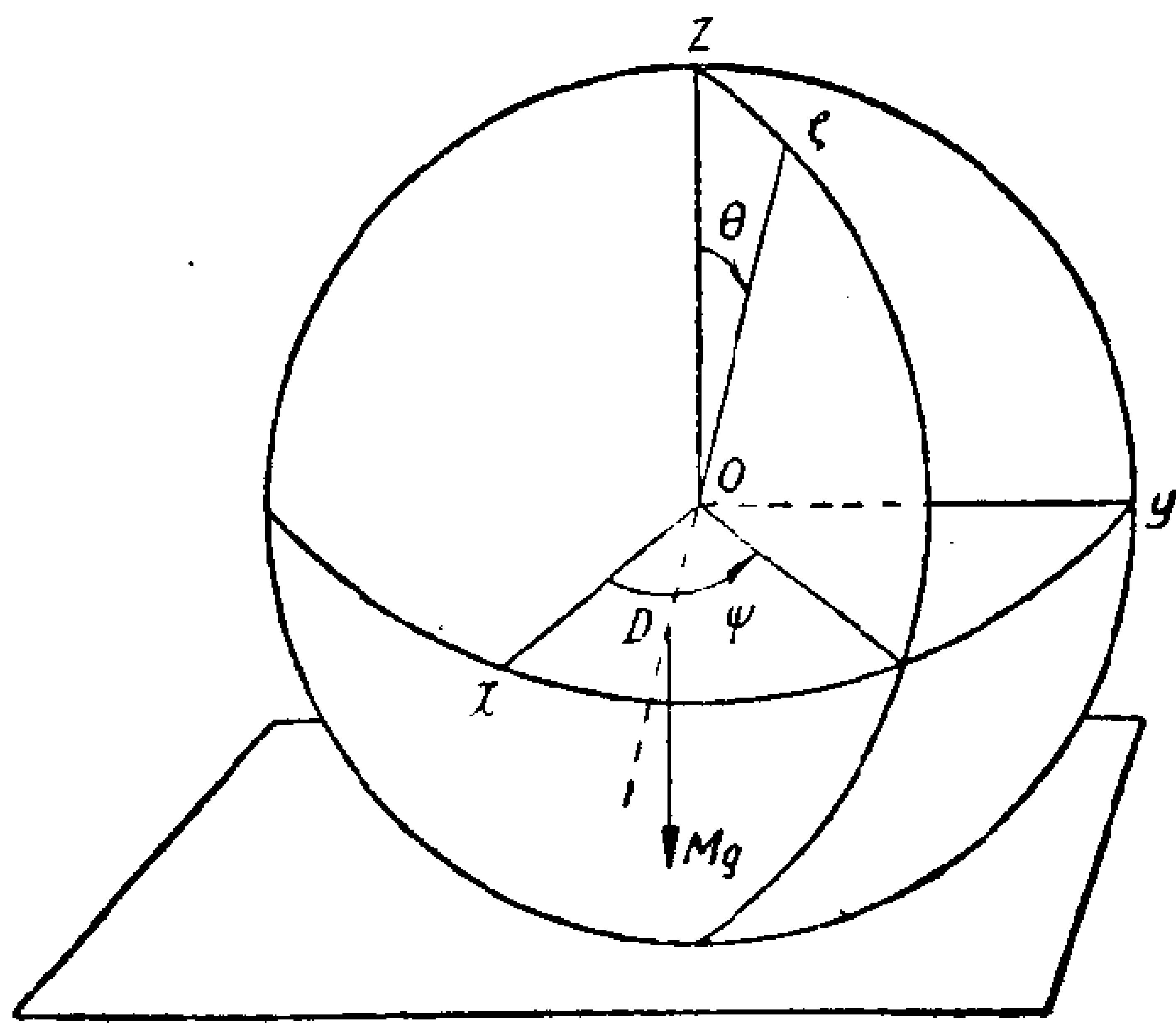


图 59.

我們取重心的两个水平坐标 x_D，y_D 和三个欧拉角 φ, ψ, θ 作为独立坐标。这里 φ 角是繞过 D、O 两点的动力对称軸 $O\zeta$ 的“自轉角”；$O\zeta$ 軸的方向和矢量 $\boldsymbol{DO}$ 的方向一致。动能和势能的表达式可写成如下形式：

① 在本例中所討論的剛体乃是一物理摆，动力对称軸是它的悬挂軸，而支点 O 可沿水平面自由滑动(无摩擦)。

$$2T=A(p^2+q^2)+Cr^2+M(\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2+\dot{z}_D^2),\ \Pi=Mgz_D.$$

这里 p, q, r 是角速度 ω 在中心慣性主軸上的投影。但

$$p^2+q^2=\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta,\quad r=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta,\quad z_D=-d\cos\theta,$$

故

$$2T=(A+Md^2\sin^2\theta)^2\dot{\theta}^2+A\dot{\psi}^2\sin^2\theta+Cr^2+M(\dot{x}_D^2+\dot{y}_D^2),$$
$$\Pi=-Mgl\cos\theta.$$

x_D, y_D, φ 和 ψ 都是循环坐标。与之对应的冲量在运动中保持常値，即

$$p_x=M\dot{x}_D=\alpha,\quad p_y=M\dot{y}_D=\beta,\quad p_\varphi=Cr=\gamma,$$
$$p_\psi=A\dot{\psi}\sin^2\theta+Cr\cos\theta=\delta. \tag{12}$$

此外还有

$$p_\theta=(A+Md^2\sin^2\theta)\dot{\theta}.$$

以变量 θ, $p_x=\alpha$, $p_y=\beta$, p_θ, $p_\varphi=\gamma$, $p_\psi=\delta$ 表示的哈密頓函数为

$$H=\frac{p_\theta^2}{2(A+Md^2\sin^2\theta)}+\frac{1}{2A}\left(\frac{\delta-\gamma\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-Mgd\cos\theta+$$
$$+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2M}=\frac{p_\theta^2}{A+Md^2\sin^2\theta}+\Pi^*, \tag{13}$$

其中

$$\Pi^*=\frac{1}{2A}\left(\frac{\delta-\gamma\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-Mgd\cos\theta+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2M} \tag{14}$$

是罗司势①。

平稳运动的存在条件(5)，在此有如下形式:

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial\theta}=0,\quad p_\theta=0.$$

稳定性条件是：在 $p_\theta=0$ 和某一待求的 θ 値上，函数 H 有严格极値。当函数 Π^* 在这个 θ 値上有严格的极小値时稳定性条件将被满足。为了求得这个値 $\theta=\theta_0$，我們令 $u=\cos\theta$，

$$f(u)=A\Pi^*=\frac{1}{2}\frac{(\delta-\gamma u)^2}{1-u^2}-Ku+\text{const}\quad(K=AMgd),$$

则

$$f'(u)=\frac{-\gamma\delta u^2+(\gamma^2+\delta^2)u-\gamma\delta}{(1-u^2)^2}-K,$$

$$f''(u)=\frac{\gamma^2+\delta^2}{(1-u^2)^3}(1-3\mu u+3u^2-\mu u^3),$$

其中

① 在討論中我們除去 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 这两个奇异値。因此，$\sin\theta\neq0$。

$$\mu=\frac{2\gamma\delta}{\gamma^2+\delta^2}\text{[1]}.$$

設方程 $f'(u)=0$ 有 $|u|<1$ 的根 u。与这个值 $|u|=\cos\theta$ 相对应的是球的平稳运动，在此运动中，球心作等速直綫移动，φ 角和 ψ 角按綫性規律变化。

为了查明平稳运动的稳定性，先来证明当 $|u|<1$ 时 $f''(u)>0$。事实上，如果当 $|u|<1$ 时 $f''(u)=0$，則由 $f''(u)$ 的表达式得 $\mu=\frac{1+3u^2}{u^3+3u}$。由此不难看出，当 $|u|<1$ 时 $|\mu|>1$，但这是不可能的，因为 $\mu=\frac{2\gamma\delta}{\gamma^2+\delta^2}$。因此，当 $|u|<1$ 时 $f''(u)\neq 0$，即 $f''(u)$ 在区間 $(-1, +1)$ 内不变号。但 $f''(0)=\gamma^2+\delta^2>0$，故当 $|u|<1$ 时 $f''(u)>0$。

由于

$$A\frac{d\Pi^*}{d\theta^2}=f''(u)\sin^2\theta-f'(u)\cos\theta=f''(u)\sin^2\theta>0,$$

故在所討論的 θ 值上，函数 Π^* 有严格极小值，即对应的平稳运动稳定。

令 $\delta=\gamma u+A\dot{\psi}(1-u^2)$[見(12)式]，則平稳运动的存在条件 $f'(u)=0$ 可予以改造。

若再将 $\gamma=Cr=C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)$ 代入所得之等式，則此条件取最后形式如下：

$$C\dot{\varphi}\dot{\psi}+(C-A)\dot{\psi}^2\cos\theta+Mgd=0. \tag{15}$$

这是在外力矩 $Mgd\sin\theta$（鉛直反力 $N=Mg$ 对极点 D 之矩）作用下存在規則进动的著名条件。

現在来分別討論三种情况。

1°. 如果

$$|Mgd+C\dot{\varphi}\dot{\psi}|>|A-C|\dot{\psi}^2,$$

則不可能有实的 θ 值满足条件(15)，因而也不可能存在具有这种角速度的平稳运动。

2°. 如果 $|Mgd+C\dot{\varphi}\dot{\psi}|<|A-C|\dot{\psi}^2$，而且 $Mgd+C\dot{\varphi}\dot{\psi}$ 和 $A-C$ 同号，則在这样的角速度之下，有平稳运动存在，而且 $\cos\theta>0$。

3°. 如果同样地有 $|Mgd+C\dot{\varphi}\dot{\psi}|<|A-C|\dot{\psi}^2$，但 $Mgd+C\dot{\varphi}\dot{\psi}$ 和 $A-C$ 异

① $\gamma^2+\delta^2>0$，因为当 $\gamma=\delta=0$ 时，函数 $\Pi^*=-Mgd\cos\theta$ 在 $\theta=0$ 处有严格极小值。

号，则在平稳运动中 $\cos\theta<0$。在这种情况下，存在稳定的平稳运动，在此运动中重心高于球的几何中心。

現在来看奇异情况。

a) $\theta_0=0$。此时由公式(12)得 $\gamma=\delta$。因此

$$f'(u)=-\frac{\gamma^2}{(1+u)^2}-K,$$

$$A\left(\frac{d\Pi^*}{d\theta}\right)_{\theta=0}=f'(u)(-\sin\theta_0)=0,$$

$$A\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2}\right)_{\theta=0}=f'(u)\ (-\cos\theta_0)=\frac{\gamma^2}{(1+u_0^2)}+K>0.$$

平稳运动永远是稳定的。

b) $\theta_0=\pi$。由公式(12)得：$\gamma=-\delta$。因此

$$f'(u)=\frac{\gamma^2}{(1-u)^2}-K,$$

$$A\left(\frac{d\Pi^*}{d\theta}\right)_{\theta=\pi}=f'(u)(-\sin\theta_0)=0,$$

$$A\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2}\right)_{\theta=\pi}=f'(u)\ (-\cos\theta_0)=\frac{\gamma^2}{(1-u_0)^2}-K=\frac{\gamma^2}{4}-K.$$

当滿足条件

$$\frac{\gamma^2}{4}>K$$

时，平稳运动是稳定的，这个条件可以更具体地写作

$$C^2r^2>4AMgd. \tag{16}$$

若不等式(16)成立，则在所討論的情况中，即使重心位于球的几何中心之上，繞鉛直軸的轉动也将是稳定的平稳运动。

参考书目

Аппель П., Теоретическая механика, т. I и II, перев. с франц., Физматгиз, 1960.

Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.

Бабаков И. М., Теория колебаний, Гостехиздат, 1958. (有中譯本)

Валле Пуссен Ш. Ж., Лекции по теоретической механике, перев. с франц., Издатинлит, т. I, 1948; т. II, 1949.

Вариационные принципы, сборник статей под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, 1959.

Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.

Голдстейн Г., Классическая механика, перев. с англ., Гостехиздат, 1957.

Зигель К. М., Лекции по небесной механике, перев. с нем., Издатинлит, 1959.

Зоммерфельд А., Механика, перев. с нем., Издатинлит, 1947.

Картан Э., Интегральные инварианты, перев. с франц., Гостехиздат, 1940.

Лагранж Ж. Л., Аналитическая механика, т. I, II, перев. с франц., Гостехиздат, 1950.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, Физматгиз, 1958. (有中譯本)

Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Теоретическая механика, ч. III, ОНТИ, 1934. (有中譯本)

Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.

Мак-Миллан В. Д., Динамика твердого тела, перев. с англ., Издатинлит, 1951.

Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952. (有中譯本)

Меркин Д. Р., Гироскопические системы, Гостехиздат, 1956. (有中譯本)

Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Изд. ЛГУ, 1938.

Суслов Г. К., Основы аналитической механики, Изд. 2-е, Киев, 1911—1912; изд. 3, переработанное Н. Н. Бухгольцем и В. К. Гольцманом под названием: Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944.

Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, перев. с англ., ОНТИ, 1937.

Четаев Н. Г., Устойчивость движения, изд. 2-е, Гостехиздат, 1955. (有中譯本)

Якоби К., Лекции по динамике, перев. с нем., ГОНТИ, 1936.

Corben H. C., Stehle Ph., Classical mechanics, Wiley, New York; Chapman, London, 1950.

Lanczos C., The variational principles of mechanics, Toronto, Univ. Toronto Press, 1949.

Routh E. T., The advanced part of a Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 6th ed., London, Macmillan, 1905.

人名索引

十画

十一画以上

*号表示俄譯音。

索　　引

二画至四画

五画

六画

七画

八画

九画

十画

十一画

十二画

十三画以上

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等学校教学用书　分析力学讲义
作者＝φ．ｐ．甘特马赫著　钟奉俄　薛问西译
页数＝２６１
ＳＳ号＝１０１３００６８
出版日期＝１９６３年０６月第１版

前言

目录